Funktionalanalysis
11. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
17./18. Januar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G45 (Beschränkte und unbeschränkte Operatoren)

(a) Sei $\mathscr{H}$ ein unendlich-dimesionaler Hilbertraum. Finden Sie einen unbeschränkten linearen Operator, der auf ganz $\mathscr{H}$ definiert ist.

(b) Es sei (a_{ij}), $i, j \in \mathbb{N}$, eine hermitesche Matrix, sodass der Operator A mit

$$(Af)(i) := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} f(j) \quad (i \in \mathbb{N})$$

jedes $f \in \ell^2(\mathbb{N})$ auf ein $Af \in \ell^2(\mathbb{N})$ abbildet. Zeigen Sie, dass A stetig ist.

Lösungshinweise:

(a) Sei $\mathcal{B}$ eine Hamelbasis von $\mathscr{H}$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ eine abzählbare Teilmenge ($\mathcal{B}$ ist überabzählbar). Dann können wir eine lineare Abbildung $B : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ definieren durch

$$\begin{aligned} B(e_n) &:= n \cdot e_n, \quad && \text{für } n \in \mathbb{N}, \\ B(b) &:= 0, && \text{für } b \in \mathcal{B},\ b \neq e_n. \end{aligned}$$

(b) A ist selbst-adjungiert und auf ganz $\ell^2(\mathbb{N})$ definiert. Mit dem Satz von Hellinger-Toeplitz folgt, dass A stetig ist.

Aufgabe G46 (Der Dual von $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist nicht isomorph zu $\ell^1(\mathbb{N})$: Ein anderer Beweis)
Sei $c(\mathbb{N}) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existiert}\}$ der Raum aller konvergenten Folgen.

(a) Zeigen Sie: Es existiert eine lineares Funktional $\varphi : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ mit $\varphi((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(\mathbb{N})$.

(b) Zeigen Sie, dass keine Folge $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ existiert, so dass $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} s_n t_n$ ist, für alle $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Lösungshinweise:

(a) Das Funktional $\tilde{\varphi} : c(\mathbb{N}) \to \mathbb{C} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$ ist linear und stetig. Also existiert mit dem Satz von Hahn-Banach eine Fortsetzung $\varphi : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$.

(b) Angenommen es existiert ein $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ mit $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} s_n t_n$ für alle $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$0 = \lim_{n\to\infty} e_m(n) = \varphi(e_m) = \sum_{i=1}^{\infty} s_n e_m(n) = s_m\,,$$

woraus $\varphi = 0$ folgt.

Aufgabe G47 (Ein lineares Funktional kann viele Fortsetzungen besitzen)
Sei $(E, \|\cdot\|) := (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_1)$, $M := \{\binom{z}{0} : z \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}^2$ und $f : M \ni \binom{z}{0} \mapsto z \in \mathbb{C}$. Dann ist f ein lineares Funktional auf M mit $\| f \| = 1$.
Bestimmen Sie alle Fortsetzungen $F : E \to \mathbb{C}$ von f mit $\| F \| = 1$.

Lösungshinweise: Lineare Abbildungen sind durch ihr Werte auf den Vektoren einer Basis bestimmt. Jede Fortsetzung von f hat also die Gestalt

$$F_r : E \to \mathbb{C} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + r\,y \quad \text{mit} \quad r \in \mathbb{C}\,.$$

Seien $\xi, \xi_0 \in \mathbb{C}^2$ mit $\xi = \binom{x}{y}$ und $\xi_0 = \binom{0}{y}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \left|F_r(\xi)\right| &= \left|x + r\,y\right| \le |x| + |r|\left|y\right| \le |x| + \left|y\right| = \|\xi\|_1\,, \quad |r| \le 1,\\ \left|F_r(\xi_0)\right| &= \left|r\,y\right| = |r|\left|y\right| > \left|y\right| = \left\|\xi_0\right\|_1\,, \quad |r| > 1. \end{aligned}$$

Also sind alle Fortsetzung von f mit $\|f\| = 1$ durch F_r mit $|r| \le 1$ gegeben.

Aufgabe G48 (Dualität von L^p und L^q für beliebige Maßräume)
Sei $1 \le p < \infty$ und sei q konjugiert zu p. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\left(L^p(\mu)\right)'$ für σ-endliche Maßräume (Ω, Σ, μ) isometrisch isomorph zu $L^q(\mu)$ ist. Für $p > 1$ ist dies auch für beliebige (nicht notwendig σ-endliche) Maße gültig.
Zeigen Sie, dass obige Aussage für $p = 1$ im Allgemeinen falsch ist, d.h. für beliebige Maße ν muss $\left(L^1(\nu)\right)'$ nicht isometrisch isomorph zu $L^\infty(\nu)$ sein.
Hinweis: Betrachten Sie auf $\Omega := [0,1]$ die σ-Algebra aller Teilmengen, die selbst oder deren Komplemente höchstens abzählbar sind, das Zählmaß ν und das Funktional $\psi : L^1(\nu) \to \mathbb{C}$, $\psi(f) := \int_0^1 f(t)\,t\,\mathrm{d}\nu(t)$.

Lösungshinweise: Ist $f \in L^1(\nu)$, dann ist $f(t) \neq 0$ an höchstens abzählbar vielen Stellen $t \in [0,1]$. Damit ist $t \mapsto f(t)t$ messbar und ψ ist stetig, denn es gilt:

$$\left|\psi(f)\right| \le \int_0^1 \left|f(t)\right|\,|t|\,\mathrm{d}\nu(t) \le \int_0^1 \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}\nu(t) = \left\|f\right\|_1\,.$$

Ließe sich ψ durch eine Funktion $g \in L^\infty(\nu)$ darstellen, käme nur $g : [0,1] \ni t \mapsto t$ in Betracht. Diese Funktion ist aber nicht messbar.

Aufgabe G49 (Nach unten beschränkte Operatoren)
Zeigen Sie: Seien E, F Banachräume. Für $A : E \to F$ stetig sind äquivalent:

(i) Es gibt eine Konstante $C > 0$ sodass $\|Ax\| \ge C\|x\|$ ist für alle $x \in E$.

(ii) A ist injektiv und das Bild $A(E) \subseteq F$ ist abgeschlossen.

Lösungshinweise: Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) haben wir bereits in Aufgabe G23 gezeigt.
Sei $G := \operatorname{ran} A \subseteq F$. Dann ist G nach Voraussetzung ein Banachraum und $\tilde{A} : E \to G$, $x \mapsto Ax$ bijektiv. Nach den Satz über die stetige Inverse ist $\tilde{A}^{-1}$ stetig und mit $C := \frac{1}{\|\tilde{A}^{-1}\|}$ gilt für $x \in E$:

$$C\,\|x\| = C\,\left\|\tilde{A}^{-1}(Ax)\right\| \le \|Ax\| \ .$$

Hausübung

Aufgabe H29 (Der Dual von c_0 und ℓ^p) (1 Punkt)

(a) Sei $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ der Raum aller Nullfolgen. Zeigen Sie, dass $\ell^1(\mathbb{N})$ isomorph zum Dual von $c_0(\mathbb{N})$ ist. Zeigen Sie hierfür, dass die Abbildung

$$i : \ell^1(\mathbb{N}) \to (c_0)' \ , \ (i(s))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n \quad \text{mit } s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}),\ t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$$

ein isometrischer Isomorphismus ist, wobei $(c_0)'$ den Dual von $c_0(\mathbb{N})$ bezeichnet.

(b) Zeigen Sie: Für $1 \le p < \infty$ ist der Dual von $\ell^p(\mathbb{N})$ isomorph zu $\ell^q(\mathbb{N})$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und der Konvention $0 = \frac{1}{\infty}$.

Lösungshinweise:

(a) Die Abbildung i ist offensichtlich linear und es gilt $|i(s)(t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|s_n\right| \left|t_n\right| \le \|s\|_1 \|t\|_\infty$. Sei $(t^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \subseteq c_0(\mathbb{N})$ definiert durch

$$t_n^{(m)} := \begin{cases} \frac{|s_n|}{s_n}, & \text{für } s_n \neq 0 \text{ und } n \le m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\left|i(s)(t^{(m)})\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n^{(m)}\right| = \sum_{n=1}^{m} \left|s_n\right| \xrightarrow{m\to\infty} \|s\|_1$ und damit $\|i(s)\|_{\mathrm{Op}} = \|s\|_1$, d.h. i ist isometrisch (und damit natürlich auch injektiv).
Sei $\varphi \in (c_0)'$. Wir setzen $s_n := \varphi(e_n)$, dann ist $\varphi = i(s)$ und für $(t^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \subseteq c_0(\mathbb{N})$ definiert wie oben folgt für alle $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} \left|s_n\right| = \sum_{n=1}^{N} s_n t_n^{(N)} = \sum_{n=1}^{N} \varphi(e_n) t_n^{(N)} = \varphi\left(\sum_{n=1}^{N} t_n^{(N)} e_n\right) \le \left\|\varphi\right\| \left\|t^{(N)}\right\|_\infty = \left\|\varphi\right\| .$$

Also ist $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ und i ist surjektiv und damit ein isometrischer Isomorphismus.

(b) Analog zu (a) zeigt man, dass

$$i : \ell^q(\mathbb{N}) \to \left(\ell^p(\mathbb{N})\right)', \ (i(s))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n \quad \text{mit } s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{N}),\ t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$$

ein isometrischer Isomorphismus ist, wobei hier die Folge $(t^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^p(\mathbb{N})$ betrachtet wird mit

$$t_n^{(m)} := \begin{cases} \frac{|s_n|^q}{s_n}, & \text{für } s_n \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe H30 (Positive lineare Funktionale sind stetig) (1 Punkt)
Sei X ein lokal-kompakter Raum, $\mathcal{C}_0(X)$ die stetigen Funktionen, die im unendlichen verschwinden, d.h. für $f \in \mathcal{C}_0(X)$ ist $\left\{x \in X : \left|f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}$ für jedes $\varepsilon > 0$ kompakt, und sei $\varphi : \left(\mathcal{C}_0(X), \|\cdot\|_\infty\right) \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional.

(a) Warum ist φ genau dann beschränkt, wenn φ auf den positiven Funktionen beschränkt ist?

(b) Zeigen Sie, dass φ stetig ist. (*Hinweis:* Nehmen Sie an, dass φ nicht stetig ist und betrachten Sie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} f_n$ für eine geeignete Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_0(X)$.)

Lösungshinweise:

(a) Für $x \in X$ sei $f_{\mathfrak{R}}(x) := \mathfrak{R}f(x)$ und $f_{\mathfrak{I}}(x) := \mathfrak{I}f(x)$, sowie $g^+(x) := \max\{0, g(x)\}$ und $g^-(x) := -\min\{0, g(x)\}$ für reellwertige $g \in \mathcal{C}_0(X)$. Dann ist $f = f_{\mathfrak{R}}^+ - f_{\mathfrak{R}}^- + i(f_{\mathfrak{I}}^+ - f_{\mathfrak{I}}^-)$ und

$$\begin{aligned} \left|\varphi(f)\right| &= \left|\varphi(f_{\mathfrak{R}}^+) - \varphi(f_{\mathfrak{R}}^-) + i\varphi(f_{\mathfrak{I}}^+) - i\varphi(f_{\mathfrak{I}}^-)\right| \\ &\leq M\left(\left\|f_{\mathfrak{R}}^+\right\|_\infty + \left\|f_{\mathfrak{R}}^-\right\|_\infty + \left\|f_{\mathfrak{I}}^+\right\|_\infty + \left\|f_{\mathfrak{I}}^-\right\|_\infty\right) \leq 4M\left\|f\right\|_\infty, \end{aligned}$$

wobei φ auf den positiven Funktionen durch eine Konstante $M > 0$ beschränkt sei.

(b) Wir nehmen an, φ ist nicht stetig. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $f_n \in \mathcal{C}_0(X)$ mit $\left\|f_n\right\|_\infty = 1$ und $\left|\varphi(f_n)\right| \geq 4^n$ und wegen (a) können wir $f_n \geq 0$ annehmen. Da $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\left\|f_n\right\|_\infty < \infty$ ist, gilt $g := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} f_n \in \mathcal{C}_0(X)$ und $g \geq 2^{-n} f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $\varphi(g - 2^{-n} f_n) = \varphi(g) - 2^{-n}\varphi(f_n) \geq 0$ was $\varphi(g) \geq 2^{-n}\varphi(f_n) \geq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ impliziert.

Aufgabe H31 (Isometrische Einbettungen in die Dualräume von L^1 und L^∞) (1 Punkt)
Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugiert und für $g \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$ sei

$$\varphi_g : L^p \to \mathbb{C} : f \mapsto \int f g\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $L^1 \to (L^\infty)'$, $g \mapsto \varphi_g$ eine isometrische Einbettung ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $L^\infty \to (L^1)'$, $g \mapsto \varphi_g$ eine isometrische Einbettung ist, falls μ ein σ-endliches Maß ist.

Lösungshinweise: Mit der Hölderschen Ungleichung folgt, dass $\left\|\varphi_g\right\|_{\mathrm{Op}} \leq \left\|g\right\|_q$ ist.

(a) Sei $h : \Omega \to \mathbb{K}$ definiert durch

$$h(x) := \begin{cases} \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|}, & \text{falls } g(x) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\|h\|_\infty = 1$ und $\left\|\varphi_g\right\|_{\mathrm{Op}} \geq \left\|g\right\|_1$ folgt aus:

$$\varphi_g(h) = \int hg = \int \frac{\overline{g}}{|g|} g = \int \left|g\right| = \left\|g\right\|_1 .$$

(b) Sei $\varepsilon > 0$, $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ mit $\mu(\Omega_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\tilde{A}_\varepsilon := \left\{x \in \Omega : \left|g(x)\right| \geq \left\|g\right\|_\infty - \varepsilon\right\}$. Dann ist $\mu(\tilde{A}_\varepsilon) \neq 0$ und es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass auch $\mu(\tilde{A}_\varepsilon \cap \Omega_{n_0}) \neq 0$ ist, da aus

$$\tilde{A}_\varepsilon = \tilde{A}_\varepsilon \cap \Omega = \tilde{A}_\varepsilon \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{A}_\varepsilon \cap \Omega_n$$

$\mu(\tilde{A}_\varepsilon) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\tilde{A}_\varepsilon \cap \Omega_n)$ folgt. Wir setzen $A_\varepsilon := \tilde{A}_\varepsilon \cap \Omega_{n_0}$ und wir definieren $h_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{K}$ durch

$$h_\varepsilon(x) := \begin{cases} \mu(A_\varepsilon)^{-1} \frac{\overline{g(x)}}{|g(x)|} \chi_{A_\varepsilon}, & \text{falls } g(x) \neq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir erhalten $\left\|h_\varepsilon\right\|_1 = \int \left|h_\varepsilon\right| = \mu(A_\varepsilon)^{-1} \int_{A_\varepsilon} \frac{\left|\overline{g(x)}\right|}{\left|g(x)\right|} = \mu(A_\varepsilon)^{-1}\mu(A_\varepsilon) = 1$ und

$$\varphi_g(h_\varepsilon) = \int h_\varepsilon g = \mu(A_\varepsilon)^{-1} \int_{A_\varepsilon} \frac{\overline{g}}{|g|} g = \mu(A_\varepsilon)^{-1} \int_{A_\varepsilon} \left|g\right| \geq \left\|g\right\|_\infty - \varepsilon .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\left\|\varphi_g\right\|_{\mathrm{Op}} \geq \left\|g\right\|_\infty$.