Funktionalanalysis
10. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
20./21. Dezember 2012

Gruppenübung

Aufgabe G41 („Gegenbeispiel“ zu Banach-Steinhaus)
Finden Sie ein „Gegenbeispiel“ zum Satz von Banach-Steinhaus für den Fall, dass der Urbildraum kein Banachraum ist.

Lösungshinweise: Man betrachte z.B. $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_2)$ und wähle eine Folge stetiger Funktionale, die (punktweise) gegen die Punktauswertung an einer Stelle $\omega \in [0,1]$ konvergiert.

Aufgabe G42 (Komplementierbarer Teilraum)
Sei E ein Banachraum und $X \subseteq E$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Es existiert eine stetige lineare Abbildung $P : E \to E$ mit $P^2 = P$ und $P(E) = X$.

(b) Es gibt einen abgeschlossenen linearen Teilraum $Y \subseteq E$, so dass die Abbildung

$$X \oplus_{l^1} Y \ni (x,y) \to x + y \in E$$

ein Homöomorphismus ist (d.h., bijektiv und in beide Richtungen stetig).

(c) Es gibt einen abgeschlossenen linearen Teilraum $Y \subseteq E$ mit $X \cap Y = \{0\}$ und $X + Y = E$.

Lösungshinweise:

(a) ⇒ (c): Sei $Y := \ker P$. Dann ist Y abgeschlossen (P ist stetig), $X \cap Y = \{0\}$ und für $z \in E$ gilt $z = P(z) + (z - P(z))$, wobei $x := P(z) = P^2(z) = P(x) \in X$ und $P(y) = P(z - P(z)) = P(z) - P(z) = 0$ mit $y := z - P(z) \in Y$, d.h. $X + Y = E$.

(c) ⇒ (b): Sei $A : X \oplus_{l^1} Y \to E : (x,y) \to x + y$. Dann folgt aus $X \cap Y = \{0\}$, dass A injektiv ist, und aus $X + Y = E$, dass A surjektiv ist. Weiter gilt für $(x,y) \in X \oplus_{l^1} Y$:

$$\left\|A(x,y)\right\| = \left\|x + y\right\| \leq \|x\| + \left\|y\right\| \overset{\text{def.}}{=} \left\|(x,y)\right\| ,$$

d.h. A ist beschränkt. Mit dem Satz über die stetige Inverse ist auch A^{-1} stetig.

(b) ⇒ (a): Sei $B : X \oplus_{l^1} Y \to E : (x,y) \to x$ und $P := B \circ A^{-1}$. Dann hat P die gewünschten Eigenschaften.

Aufgabe G43 (Satz von Szegö)
Um das Intergral $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ für eine stetige Funktion f angenähert zu berechnen, bedient man sich häufig Näherungsformeln der Gestalt

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} f(t_i^{(n)}),$$

wobei $t_0^{(n)}, \dots, t_n^{(n)} \in [0,1]$ und $\alpha_0^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)} \in \mathbb{R}$ sind. Man fragt sich nun, ob $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert. Aufschluss darüber liefert der folgende Satz von Szegö.

Sei Q_n wie oben. Dann sind äquivalent:

(i) $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ für alle $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

(ii) $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ für alle Polynome und $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{i=0}^n |\alpha_i^{(n)}| < \infty$.

Beweisen Sie diesen Satz. (*Hinweis:* Was ist $||Q_n||$?)

Bemerkung: Für die Trapezregel gilt beispielsweise

$$Q_n(f) = \frac{1}{n}\left(\frac{f(t_0)}{2} + f(t_1) + \ldots + f(t_{n-1}) + \frac{f(t_n)}{2}\right)$$

mit $t_i = \frac{i}{n}$, $0 \le i \le n$. Man kann zeigen, dass $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert für alle $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, also insbesondere für Polynome und somit auch für alle stetigen Funktionen.

Lösungshinweise: Seien $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$ mit $\left\|f\right\|_\infty, \left\|g\right\|_\infty \le 1$ und $g(t_i^{(n)}) = \frac{|\alpha_i^{(n)}|}{\alpha_i^{(n)}}$ für $\alpha_i^{(n)} \neq 0$. Dann folgt $\left\|Q_n\right\| = \sum_{i=0}^n |\alpha_i^{(n)}|$ aus

$$\left|Q_n(f)\right| \le \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i^{(n)}|\,|f(t_i^{(n)})| \le \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i^{(n)}|$$

und

$$\left|Q_n(g)\right| = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} \frac{|\alpha_i^{(n)}|}{\alpha_i^{(n)}} = \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i^{(n)}|\,.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Für $n \in \mathbb{N}$ ist $Q_n : (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional und nach Voraussetzung konvergiert $Q_n(f)$ für jedes $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Damit ist $\left\{\left|Q_n(f)\right| \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$ beschränkt für jedes $f \in \mathcal{C}([0,1])$ und nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ist $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{i=0}^n |\alpha_i^{(n)}| = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left\|Q_n\right\| < \infty$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Da die Menge der Polynome dicht in $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist (Satz von Weierstraß), d.h. $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf einer totalen Menge bzgl. der stop-Topologie, und $\left\{\left\|Q_n\right\| = \sum_{i=0}^n |\alpha_i^{(n)}| \,:\, n \in \mathbb{N}_0\right\}$ beschränkt ist, folgt die stop-Konvergenz von $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit die Behauptung.

Aufgabe G44 (Banach Steinhaus)
Können Sie den Satz von Banach-Steinhaus auch auf Netze verallgemeinern? Wie muss er dann formuliert werden?

Lösungshinweise: Konvergente Netze müssen nicht beschränkt sein – im Gegensatz zu konvergenten Folgen. Man muss also zusätzlich fordern, dass das betrachtete konvergente Netz beschränkt ist, um dann ein analoges Resultat für Netze zu erhalten.

Hausübung

Aufgabe H26 (Ein Gegenbeispiel zu Fourierreihen) (1 Punkt)
Zeigen Sie: Es gibt eine stetige periodische Funktion $f \in \mathcal{C}_{period.}([-\pi,\pi])$, deren Fourierreihe nicht überall punktweise gegen f konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie die linearen Funktionale

$$\varphi_n : (\mathcal{C}_{period.}([-\pi,\pi]), ||\cdot||_\infty) \ni f \mapsto (P_n f)(0)\,,$$

wobei wie in der Vorlesung P_n die durch den Dirichletkern gegebene orthogonale Projektion auf den Raum der trigonometrischen Polynome bis zum Grad n sei. Was können Sie über die Normen der φ_n für $n \to \infty$ sagen?

Lösungshinweise: In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Projektion P_n durch $(P_n f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$ gegeben ist.
Seien $f, g \in \mathcal{C}_{period.}([-\pi,\pi])$ mit $\left\|f\right\|_\infty = 1$ und $g(y) = \frac{\overline{D_n(-y)}}{|D_n(-y)|+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Dann folgt aus

$$\left|\varphi_n(f)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(0-y)f(y)\,\mathrm{d}y\right| \leq \frac{1}{2\pi}\left\|f\right\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi}\left|D_n(-y)\right|\,\mathrm{d}y \qquad \text{und}$$

$$\left|\varphi_n(g)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|D_n(-y)\right|^2}{\left|D_n(-y)\right|+\varepsilon}\,\mathrm{d}y\right| \geq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left|D_n(-y)\right|^2-\varepsilon^2}{\left|D_n(-y)\right|+\varepsilon}\,\mathrm{d}y\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_n(-y)\right| - \varepsilon\,\mathrm{d}y\right|$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$, dass $\left\|\varphi_n\right\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_n(-y)\right|\,\mathrm{d}y$ gilt. Mit $D_n(y) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}$ für $0 < x < \pi$ erhalten wir mit der Substitution $(n+\frac{1}{2})y = x$ für $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|D_n(y)\right|\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}\right|\mathrm{d}y \geq 4\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin(n+\frac{1}{2})y\right|}{|y|}\,\mathrm{d}y = 4\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin x|}{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}|x|}\,\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y$$
$$\geq 4\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{|x|}\,\mathrm{d}y \geq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}y = C\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\,,$$

für eine passend gewählte Konstante $C > 0$. Also ist $\left\{\left\|\varphi_n\right\| \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$ nicht beschränkt und aus dem Satz von Banach-Steinhaus folgt, dass es ein $f_0 \in \mathcal{C}_{period.}([-\pi,\pi])$ geben muss, so dass $\{\varphi_n(f_0) = (P_n f_0)(0) \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ nicht beschränkt ist. Die Fourierreihe von f_0 konvergiert also insbesondere an der Stelle 0 nicht.

Aufgabe H27 (Grenzwerte punktweise konvergenter Folgen stetiger Funktionen) (1 Punkt)
Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_m : X \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergieren.

Für $m,n \in \mathbb{N}$ sei $A_{m,n} := \left\{x \in X \,:\, \left|f_m(x) - f_{m+k}(x)\right| \le \frac{1}{n} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $A_{m,n}$ abgeschlossen, $A_{m,n} \setminus \mathring{A}_{m,n}$ nirgends dicht ($\mathring{A}_{m,n}$ bezeichnet das Innere von $A_{m,n}$) und $X = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} A_{m,n}$.

(b) Zeigen Sie, dass für $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \mathring{A}_{m,n}$ gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists r > 0\ \forall y \in K_r(x) : \left|f(y) - f_m(y)\right| \le \tfrac{1}{n}\,.$$

Folgern Sie daraus mit einem $\frac{\varepsilon}{3}$-Argument, dass f stetig in $x \in X$ ist, d.h. $x \in A := \{x \in X \,:\, f \text{ stetig in } x\}$.

(c) Zeigen Sie, dass $X \setminus \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \mathring{A}_{m,n} \subseteq \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \left(A_{m,n} \setminus \mathring{A}_{m,n}\right)$ ist für $n \in \mathbb{N}$. Folgern Sie daraus, dass gilt:

$$X \setminus A \subseteq \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} \left(A_{m,n} \setminus \mathring{A}_{m,n}\right).$$

(d) Zeigen Sie, dass die Menge A der Punkte, in denen f stetig ist, dicht in X liegt.

Lösungshinweise:

(a) Da die Funktion $x \mapsto \left|f_m(x) - f_{m+k}(x)\right|$ stetig ist, ist $A_{m,n}$ abgeschlossen. $A_{m,n} \setminus \mathring{A}_{m,n}$ enthält offensichtlich keine inneren Punkte und ist damit nirgends dicht. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge. Also gibt es zu jedem $x \in X$ ein $m_n \in \mathbb{N}$, so dass $\left|f_k(x) - f_l(x)\right| \le \frac{1}{n}$ ist für alle $k,l \ge m_n$. Daraus folgt $X = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} A_{m,n}$ für jedes n$\in \mathbb{N}$.

(b) Für $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \mathring{A}_{m,n}$ gilt nach Definition:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall y \in K_\varepsilon(x) : \left|f_m(y) - f_{m+k}(y)\right| \le \tfrac{1}{n}\ \forall k \in \mathbb{N}\,.$$

Nun folgt die 1. Behauptung aus $\left|f(y) - f_m(y)\right| \le \left|f(y) - f_{m+k}(y)\right| + \left|f_{m+k}(y) - f_m(y)\right|$ und $\left|f(y) - f_{m+k}(y)\right| \longrightarrow 0$ für $k \to \infty$.
Sei $\varepsilon > 0$ und $n > \frac{3}{\varepsilon}$. Dann existieren $m_0 \in \mathbb{N}$ und $r > 0$, so dass $\left|f(y) - f_{m_0}(y)\right| \le \frac{1}{n}$ ist für alle $y \in K_r(x)$. Außerdem gibt es ein $\tilde{r} > 0$, so dass $\left|f_{m_0}(x) - f_{m_0}(y)\right| \le \frac{1}{n}$ ist für alle $y \in K_{\tilde{r}}(x)$, da f_{m_0} stetig ist. Also gilt für alle $y \in K_r(x) \cap K_{\tilde{r}}(x)$:

$$\left|f(x) - f(y)\right| \le \left|f(x) - f_{m_0}(x)\right| + \left|f_{m_0}(x) - f_{m_0}(y)\right| + \left|f_{m_0}(y) - f(y)\right| \le \tfrac{3}{n} < \varepsilon\,.$$

(c) Aus (a) wissen wir, dass $X = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} A_{m,n}$ gilt. Damit folgt:

$$X \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathring{A}_{m,n} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{m,n} \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathring{A}_{m,n} \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \left(A_{m,n} \setminus \mathring{A}_{m,n}\right).$$

Mit Teil (b) erhalten wir nun:

$$X \setminus A \subseteq X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathring{A}_{m,n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathring{A}_{m,n} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (A_{m,n} \setminus \mathring{A}_{m,n}) \,.$$

Wir haben also gezeigt, dass $X \setminus A$ die abzählbare Vereinigung der nirgends dichten Mengen $A_{m,n} \setminus \mathring{A}_{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, ist. D.h. die Menge $X \setminus A$ der Punkte in X, in denen f *nicht stetig* ist, ist von *1. Kategorie* bzw. *mager*.

(d) Gehen wir zu den Komplementen über, erhalten wir A als abzählbaren Schnitt über die offenen und dichten Mengen $\left(A_{m,n} \setminus \mathring{A}_{m,n}\right)^{\complement}$. Nach dem Satz von Baire ist A dicht.

Aufgabe H28 (Konvergenz auf einer ONB) (1 Punkt)
Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{E} := (e_i)_{i\in I}$ eine ONB von $\mathscr{H}$. Zeigen Sie, dass für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{H}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y \rangle = 0$ für alle $y \in \mathscr{H}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, e \rangle = 0$ für alle $e \in \mathcal{E}$ und $\left\{ \left\| x_n \right\| \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}$ ist beschränkt.

Lösungshinweise:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\psi_n : \mathscr{H} \to \mathbb{C} : y \mapsto \langle x_n, y \rangle$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathscr{H}$, dass nach Voraussetzung gegen Null konvergiert. Damit ist $\left\{ \left| \langle x_n, y \rangle \right| \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}$ beschränkt für jedes $y \in \mathscr{H}$. Mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \psi_n \right\| < \infty$ und da $\left\| \psi_n \right\| = \left\| x_n \right\|$ ist, folgt die Behauptung.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Aus der Beschränktheit von $\left\{ \left\| x_n \right\| \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}$ und der stop-Konvergenz auf der totalen Menge $\mathcal{E}$, folgt die stop-Konvergenz auf $\mathscr{H}$ und damit die Behauptung.