Funktionalanalysis
10. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
20./21. Dezember 2012

Gruppenübung

Aufgabe G41 („Gegenbeispiel" zu Banach-Steinhaus)
Finden Sie ein „Gegenbeispiel" zum Satz von Banach-Steinhaus für den Fall, dass der Urbildraum kein Banachraum ist.

Lösungshinweise: Man betrachte z.B. $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_2)$ und wähle eine Folge stetiger Funktionale, die (punktweise) gegen die Punktauswertung an einer Stelle $\omega \in [0,1]$ konvergiert.

Aufgabe G42 (Komplementierbarer Teilraum)
Sei E ein Banachraum und $X \subseteq E$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Es existiert eine stetige lineare Abbildung $P : E \to E$ mit $P^2 = P$ und $P(E) = X$.

(b) Es gibt einen abgeschlossenen linearen Teilraum $Y \subseteq E$, so dass die Abbildung

$$X \oplus_{l^1} Y \ni (x, y) \to x + y \in E$$

ein Homöomorphismus ist (d.h., bijektiv und in beide Richtungen stetig).

(c) Es gibt einen abgeschlossenen linearen Teilraum $Y \subseteq E$ mit $X \cap Y = \{0\}$ und $X + Y = E$.

Lösungshinweise:

(a) ⇒ (c): Sei $Y := \ker P$. Dann ist Y abgeschlossen (P ist stetig), $X \cap Y = \{0\}$ und für $z \in E$ gilt $z = P(z) + (z - P(z))$, wobei $x := P(z) = P^2(z) = P(x) \in X$ und $P(y) = P(z - P(z)) = P(z) - P(z) = 0$ mit $y := z - P(z) \in Y$, d.h. $X + Y = E$.

(c) ⇒ (b): Sei $A : X \oplus_{l^1} Y \to E : (x, y) \to x + y$. Dann folgt aus $X \cap Y = \{0\}$, dass A injektiv ist, und aus $X + Y = E$, dass A surjektiv ist. Weiter gilt für $(x, y) \in X \oplus_{l^1} Y$:

$$\left\|A(x,y)\right\| = \left\|x + y\right\| \leq \|x\| + \left\|y\right\| \stackrel{\text{def.}}{=} \left\|(x,y)\right\| ,$$

d.h. A ist beschränkt. Mit dem Satz über die stetige Inverse ist auch A^{-1} stetig.

(b) ⇒ (a): Sei $B : X \oplus_{l^1} Y \to E : (x, y) \to x$ und $P := B \circ A^{-1}$. Dann hat P die gewünschten Eigenschaften.

Aufgabe G43 (Satz von Szegö)
Um das Intergral $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ für eine stetige Funktion f angenähert zu berechnen, bedient man sich häufig Näherungsformeln der Gestalt

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} f(t_i^{(n)}),$$

wobei $t_0^{(n)}, \dots, t_n^{(n)} \in [0,1]$ und $\alpha_0^{(n)}, \dots, \alpha_n^{(n)} \in \mathbb{R}$ sind. Man fragt sich nun, ob $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert. Aufschluss darüber liefert der folgende Satz von Szegö.

Sei Q_n wie oben. Dann sind äquivalent:

(i) $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ *für alle* $f \in \mathcal{C}([0,1])$.

(ii) $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ *für alle Polynome und* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i^{(n)}| < \infty$.

Beweisen Sie diesen Satz. (*Hinweis:* Was ist $||Q_n||$?)

Bemerkung: Für die Trapezregel gilt beispielsweise

$$Q_n(f) = \frac{1}{n}\left(\frac{f(t_0)}{2} + f(t_1) + \ldots + f(t_{n-1}) + \frac{f(t_n)}{2}\right)$$

mit $t_i = \frac{i}{n}$, $0 \le i \le n$. Man kann zeigen, dass $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert für alle $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, also insbesondere für Polynome und somit auch für alle stetigen Funktionen.

Lösungshinweise: Seien $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$ mit $\|f\|_\infty, \|g\|_\infty \le 1$ und $g(t_i^{(n)}) = \frac{|\alpha_i^{(n)}|}{\alpha_i^{(n)}}$ für $\alpha_i^{(n)} \neq 0$. Dann folgt $\|Q_n\| = \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i^{(n)}|$ aus

$$\left|Q_n(f)\right| \le \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i^{(n)}|\,|f(t_i^{(n)})| \le \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i^{(n)}|$$

und

$$\left|Q_n(g)\right| = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} \frac{|\alpha_i^{(n)}|}{\alpha_i^{(n)}} = \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i^{(n)}|\,.$$

(i) ⇒ (ii): Für $n \in \mathbb{N}$ ist $Q_n : (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional und nach Voraussetzung konvergiert $Q_n(f)$ für jedes $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Damit ist $\left\{\left|Q_n(f)\right| \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$ beschränkt für jedes $f \in \mathcal{C}([0,1])$ und nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ist $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i^{(n)}| = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \|Q_n\| < \infty$.

(ii) ⇒ (i): Da die Menge der Polynome dicht in $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ ist (Satz von Weierstraß), d.h. $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf einer totalen Menge bzgl. der stop-Topologie, und $\left\{\|Q_n\| = \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i^{(n)}| \,:\, n \in \mathbb{N}_0\right\}$ beschränkt ist, folgt die stop-Konvergenz von $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit die Behauptung.

Aufgabe G44 (Banach Steinhaus)
Können Sie den Satz von Banach-Steinhaus auch auf Netze verallgemeinern? Wie muss er dann formuliert werden?

Lösungshinweise: Konvergente Netze müssen nicht beschränkt sein – im Gegensatz zu konvergenten Folgen. Man muss also zusätzlich fordern, dass das betrachtete konvergente Netz beschränkt ist, um dann ein analoges Resultat für Netze zu erhalten.

Hausübung

Aufgabe H26 (Ein Gegenbeispiel zu Fourierreihen) (1 Punkt)
Zeigen Sie: Es gibt eine stetige periodische Funktion $f \in \mathcal{C}_{period.}([-\pi, \pi])$, deren Fourierreihe nicht überall punktweise gegen f konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie die linearen Funktionale

$$\varphi_n : (\mathcal{C}_{period.}([-\pi, \pi]), ||\cdot||_\infty) \ni f \mapsto (P_n f)(0) ,$$

wobei wie in der Vorlesung P_n die durch den Dirichletkern gegebene orthogonale Projektion auf den Raum der trigonometrischen Polynome bis zum Grad n sei. Was können Sie über die Normen der φ_n für $n \to \infty$ sagen?

Aufgabe H27 (Grenzwerte punktweise konvergenter Folgen stetiger Funktionen) (1 Punkt)
Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_m : X \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergieren.

Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei $A_{m,n} := \left\{x \in X \;:\; \left|f_m(x) - f_{m+k}(x)\right| \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $A_{m,n}$ abgeschlossen, $A_{m,n} \backslash \mathring{A}_{m,n}$ nirgends dicht ($\mathring{A}_{m,n}$ bezeichnet das Innere von $A_{m,n}$) und $X = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} A_{m,n}$.

(b) Zeigen Sie, dass für $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \mathring{A}_{m,n}$ gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \exists r > 0\ \forall y \in K_r(x) : \left|f(y) - f_m(y)\right| \leq \frac{1}{n} .$$

Folgern Sie daraus mit einem $\frac{\varepsilon}{3}$-Argument, dass f stetig in $x \in X$ ist, d.h. $x \in A := \{x \in X \;:\; f \text{ stetig in } x\}$.

(c) Zeigen Sie, dass $X \backslash \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \mathring{A}_{m,n} \subseteq \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} (A_{m,n} \backslash \mathring{A}_{m,n})$ ist für $n \in \mathbb{N}$. Folgern Sie daraus, dass gilt:

$$X \backslash A \subseteq \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} (A_{m,n} \backslash \mathring{A}_{m,n}) .$$

(d) Zeigen Sie, dass die Menge A der Punkte, in denen f stetig ist, dicht in X liegt.

Aufgabe H28 (Konvergenz auf einer ONB) (1 Punkt)
Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{E} := (e_i)_{i\in I}$ eine ONB von $\mathscr{H}$. Zeigen Sie, dass für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{H}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = 0$ für alle $y \in \mathscr{H}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, e\rangle = 0$ für alle $e \in \mathcal{E}$ und $\left\{\left\|x_n\right\| \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$ ist beschränkt.