Funktionalanalysis
9. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
13./14. Dezember 2012

Gruppenübung

Aufgabe G37 (Fouriertransformation)
Gegeben sei die 2π-periodische Funktion s mit

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{für } x \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: Die (reelle) Fourierreihe $\tilde{s}$ von s ist

$$\tilde{s}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

(b) Gegeben sei die Funktion S mit $S(x) = \int_0^x s(t)\,\mathrm{d}t$. Weisen Sie mittels partieller Integration nach, dass man die Fourierreihe $\tilde{S}$ von S durch gliedweise Integration von $\tilde{s}$ erhält.

(c) Zeigen Sie mit Aufgabenteil (a) und (b):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Lösungshinweise:

(a) Für $n \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \hat{s}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(\pi - t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{4\pi} \int_0^{2\pi} t\, e^{-int}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-1}{4\pi} \left[t \frac{1}{-in} e^{-int} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{-in} e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2in} \end{aligned}$$

und

$$\hat{s}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(\pi - t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Also gilt:

$$\tilde{s}(x) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=-N}^{-1} \frac{1}{2in} e^{inx} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2in} e^{inx} \right) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}\,.$$

(b) Mit $S(2\pi) = S(0) = 0$ erhalten wir für $n \neq 0$:

$$\hat{S}(n) = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2\pi}\left[S(t)\tfrac{1}{-in}e^{-int}\right]_0^{2\pi} - \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(t)\tfrac{1}{-in}e^{-int}\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{in}\hat{s}(n) = \tfrac{-1}{2n^2}$$

und

$$\hat{S}(0) = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tfrac{\pi}{2}t - \tfrac{1}{2}t^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}.$$

Also gilt:

$$\tilde{S}(x) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=-N}^{-1}\tfrac{-1}{2n^2}e^{inx} + \sum_{n=1}^{N}\tfrac{-1}{2n^2}e^{inx}\right) + \frac{\pi^2}{6} = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\tfrac{-1}{n^2}\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right) + \frac{\pi^2}{6}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\cos(nx)}{n^2} + \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Mit der Identität, die wir in Teil (c) zeigen, folgt:

$$\tilde{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\cos(nx)}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\cos(nx)}{n^2} - \frac{-1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\,.$$

(c) Aus $S(x) = \tilde{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\cos(nx)}{n^2} + \frac{\pi^2}{6}$ folgt:

$$0 = S(0) = \tilde{S}(0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\cos(0)}{n^2} + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

und

$$\frac{\pi^2}{4} = S(\pi) = \tilde{S}(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\cos(n\pi)}{n^2} + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Aufgabe G38 (Approximation konstanter Funktionen)

(a) Zeigen Sie, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $s_n(x) = \sqrt{2}\,\sin(nx)$ eine ONB von $\mathscr{H}_0 := L^2([0,\pi], \frac{\lambda}{\pi})$ ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- Setzen Sie jede Funktion $f_0 \in \mathscr{H}_0$ antisymmetrisch auf $[-\pi,\pi]$ zu einer Funktion $f \in \mathscr{H} := L^2([-\pi,\pi], \frac{\lambda}{2\pi})$ fort, d.h. $f(x) := -f_0(-x)$ für $x \in [-\pi, 0)$. Machen Sie sich klar, dass Sie so jede Funktion im Teilraum $\mathscr{H}_a \subseteq \mathscr{H}$ der antisymmetrischen Funktionen generieren können.
- Bestimmen Sie die Projektion P_a auf den abgeschlossenen Teilraum $\mathscr{H}_a$.

  Hinweis: Betrachten Sie den Operator $U_a : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, $Uf(x) := -f(-x)$ und nutzen Sie Ihr Wissen aus Aufgabe H15.
- Projizieren Sie eine Ihnen bekannte ONB von $\mathscr{H}$ auf $\mathscr{H}_a$.

(b) Stellen Sie die konstante Funktion $e \equiv 1$ als Reihe über die Funktionen s_n, $n \in \mathbb{N}$, dar.

Lösungshinweise:

(a) Da U_a unitär und $U_a^2 f(x) = -U_a f(-x) = f(x)$ ist, folgt mit H15, dass $P_a = \frac{\mathbb{1}+U_a}{2}$ ist. Da $\{s_n, c_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ mit $c_n(x) := \sqrt{2}\cos(nx)$ eine ONB von $\mathscr{H}$ bildet, ist $\{P_a s_n, P_a c_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ total in $\mathscr{H}_a$. Aus

$$\begin{aligned} P_a c_n(x) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\big(\cos(nx) - \cos(-nx)\big) = 0, \\ P_a s_n(x) &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\big(\sin(nx) - \sin(-nx)\big) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\big(\sin(nx) + \sin(nx)\big) = \sqrt{2}\sin(nx) \end{aligned}$$

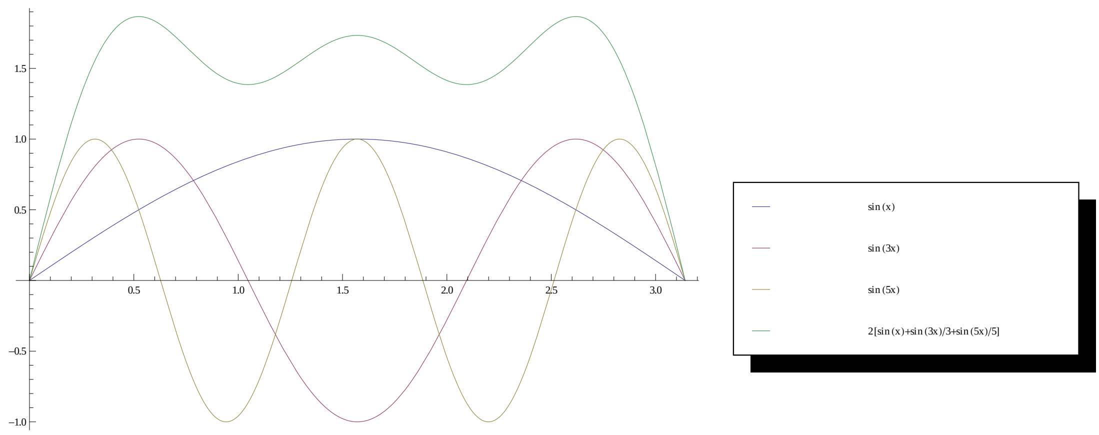
und $\langle s_m, s_n\rangle_{L^2([0,\pi])} = \delta_{m,n}$ (Kronecker-Delta) folgt die Behauptung.

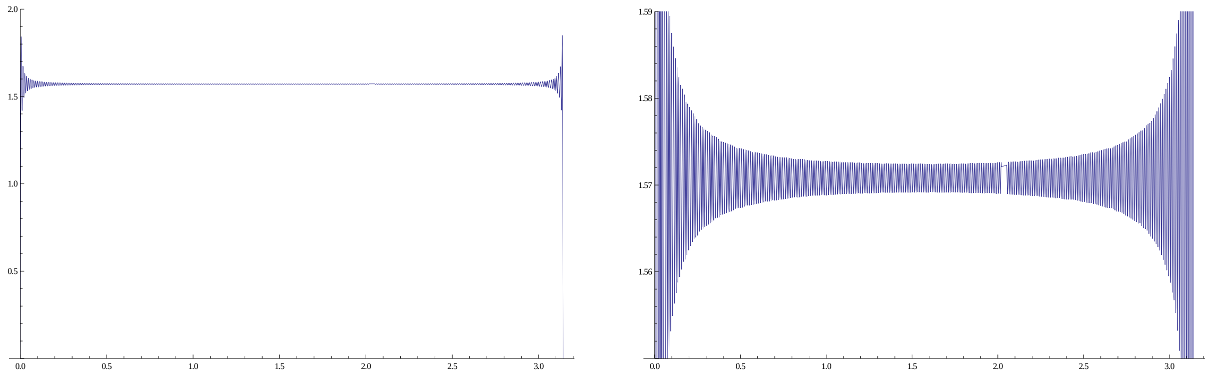
(b) Für $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir:

$$\langle e, s_n\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{2}\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\sqrt{2}\cos(nx)}{n\pi}\right]_0^\pi = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{n\pi}, & \text{für } n \text{ ungerade}, \\ 0, & \text{für } n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Also gilt (vgl. Abb. unten):

$$e = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \langle e, s_n\rangle s_n = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{2\sqrt{2}}{(2n+1)\pi} s_{2n+1}\,, \quad \text{d.h.} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{2}{(2n+1)} \sin\big((2n+1)x\big) = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [0,\pi]\,.$$





Zwei Plots der Funktion $x \mapsto \sum_{n=0}^{300} \frac{2}{(2n+1)} \sin\big((2n+1)x\big)$.

Aufgabe G39 (Dirichlet- und Fejér-Kerne)
Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $e_k \in \mathscr{H} = L^2\big([-\pi,\pi], \frac{\lambda}{2\pi}\big)$ mit $e_k(t) = e^{ikt}$. Dann ist durch $D_n := \sum_{k=-n}^n e_k$ bzw. $F_n := \sum_{k=-n}^n \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big) e_k$ der n-te Dirichlet-Kern bzw. Fejér-Kern gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n D_k$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ gilt:

$$\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) \cdot \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\tfrac{2k+1}{2}x\right) = \sin^2\left(\tfrac{n+1}{2}x\right).$$

Hinweis: Wie lassen sich $\sin\left(\frac{a}{2}\right)$ und $\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$ mit Hilfe von Exponentialfunktionen ausdrücken?

(c) Zeigen Sie, dass sich der Fejér-Kern auch wie folgt darstellen lässt:

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2, & \text{für } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ n+1, & \text{für } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Hinweis: Nutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte geschlossene Form des Dirichlet-Kerns.

Lösungshinweise:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k &= \frac{1}{n+1}\Big((n+1)e_0 + n(e_{-1}+e_1) + (n-1)(e_{-2}+e_2) + \ldots + (e_{-n}+e_n)\Big) \\ &= e_0 + \left(1-\tfrac{1}{n+1}\right)(e_{-1}+e_1) + \left(1-\tfrac{2}{n+1}\right)(e_{-2}+e_2) + \ldots + \left(1-\tfrac{1}{n+1}\right)(e_{-n}+e_n) \\ &= \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e_k = F_n\,. \end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) \cdot \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\tfrac{2k+1}{2}x\right) &= \tfrac{-1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\frac{2k+1}{2}x} - e^{-i\frac{2k+1}{2}x}\right)\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right) \\ &= \tfrac{-1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\frac{2k+1}{2}x+i\frac{1}{2}x} - e^{i\frac{2k+1}{2}x-i\frac{1}{2}x} - e^{-i\frac{2k+1}{2}x+i\frac{1}{2}x} + e^{-i\frac{2k+1}{2}x-i\frac{1}{2}x}\right) \\ &= \tfrac{-1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{i(k+1)x} - e^{ikx} - e^{-ikx} + e^{-i(k+1)x}\right) \\ &= \tfrac{-1}{4}\left(2 + e^{i(n+1)x} + e^{-i(n+1)x}\right) = \sin^2\left(\tfrac{n+1}{2}x\right), \end{aligned}$$

da sich fast alle Summanden der Summe gegenseitig aufheben.

(c) Mit (a) und (b) folgt für $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ und $y \in 2\pi\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\tfrac{2k+1}{2}x\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2, \end{aligned}$$

sowie

$$F_n(y) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(y) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{1}{n+1}\left(n+1+2\frac{n(n+1)}{2}\right) = n+1\,.$$

Aufgabe G40 (Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation)
Für $f \in L^1([-\pi,\pi])$ und $n \in \mathbb{Z}$ sei $\hat{f}(n)$ gegeben durch

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie: Für $f, g \in L^1([-\pi,\pi])$ ist $\widehat{f*g}(n) = \hat{f}(n)\cdot\hat{g}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Lösungshinweise: Mit Fubini gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f*g(t)\,e^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)g(y)\,e^{-int}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)\,e^{-int}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)\,e^{-in(t-y)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny}\hat{f}(n)\,\mathrm{d}y = \hat{f}(n)\cdot\hat{g}(n)\,.
\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H24 (Poisson-Kern und Dirichlet-Problem) (1 Punkt)
Für $0 \leq r < 1$ definiert man den Poisson-Kern

$$P_r(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} .$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $z = re^{it}$, dann gilt

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \Re \frac{1+z}{1-z} .$$

(b) Setzt man $P_n(t) := P_r(t)$ für $r := 1 - \frac{1}{n}$, dann ist $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine approximierende Eins, d.h.

(i) $P_n(t) \geq 0$,

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$,

(iii) Für jedes $0 < \delta < \pi$ konvergiert die Einschränkung von $P_n(t)$ auf das Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ gleichmäßig gegen Null, für $n \to \infty$.

Also konvergiert $(f * P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0, 2\pi]$ gleichmäßig gegen f für $f \in \mathcal{C}_{\text{period.}}([0, 2\pi])$.

(c) Sei f stetig (und reell) auf dem Einheitskreis $\mathbb{T}$ in der komplexen Ebene, und sei $\tilde{f}$ auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ definiert durch $\tilde{f}(e^{it}) := f(e^{it})$ und $\tilde{f}(re^{it}) := (P_r * f)(t)$ für $0 \leq r < 1$, dann ist $\tilde{f}$ stetig auf $\mathbb{D}$, und im Inneren ist $\Delta\tilde{f} = 0$, dass heißt, $\tilde{f}$ löst das Dirichletproblem für die Randverteilung f.

Hinweis: 1.) Bei der Definition der Faltung wird der Einheitskreis mit dem Intervall $[0, 2\pi)$ identifiziert. 2.) Der Übergang zu Polarkoordinaten kann viel Arbeit sparen (wie lautet Δ in Polarkoordinaten?).

(d) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\mathbb{D} \subset U$. Ferner sei f eine holomorphe Funktion auf U. Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel, dass für alle $z = re^{it}$, $0 \leq r < 1$, gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-s) f(e^{is})\,\mathrm{d}s .$$

Hinweis: 1.) Entwickeln Sie den Nenner des Integranden der Cauchyschen Integralformel in eine Potenzreihe. 2.) Zeigen Sie: $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{is})e^{ins}\,\mathrm{d}s = 0$ für $n = 1, 2, \ldots$

Aufgabe H25 (Bairescher Kategoriensatz) (1 Punkt)
Sei X ein unendlich dimensionaler normierter Raum und sei $Y \subset X$ ein endlich dimensionaler Teilraum von X.

(a) Zeigen Sie, dass Y abgeschlossen in X ist und keinen inneren Punkt enthält.

(b) Sei X der lineare Raum aller Folgen mit nur endlich vielen Gliedern ungleich 0.
Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|)$ kein vollständiger Raum ist.

(c) Sei $\mathcal{P}([0,1])$ der Vektorraum aller Polynome auf $[0,1]$. Zeigen Sie, dass es auf $\mathcal{P}([0,1])$ keine Norm geben kann, die diesen Raum zu einem Banachraum macht.