Funktionalanalysis
8. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
06./07. Dezember 2012

Gruppenübung

Aufgabe G32
Sei $\mathcal{P}_2 \subseteq \mathcal{H} := L^2([-1,1])$ der lineare Teilraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich zwei.

(a) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion P auf $\mathcal{P}_2$.

(b) Sei $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$ mit $f_1(x) = x^3$ und $f_2(x) = \sin(x)$ für $x \in [-1,1]$. Berechnen Sie Pf_i, $i = 1,2$.

Lösungshinweise:

(a) Sei $(e_i)_{i=0}^2$ eine ONB von $\mathcal{P}_2$, dann ist P gegeben durch

$$Pf := \sum_{i=0}^{2} \langle f, e_i\rangle e_i \quad \text{für } f \in \mathcal{H}.$$

Es genügt also eine ONB von $\mathcal{P}_2$ zu bestimmen. $\mathcal{P}_2$ wird von den Monomen $1,\ x,\ x^2$ aufgespannt. Sei $\tilde{e}_0 \equiv 1$ sowie $\tilde{e}_1(x) := x$ und $\tilde{e}_2(x) := x^2$ für $x \in [-1,1]$. Dann folgt aus

$$\left\|\tilde{e}_0\right\|^2 = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 2, \qquad \left\|\tilde{e}_1\right\|^2 = \int_{-1}^{1} |x|^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3} \quad \text{und} \quad \langle \tilde{e}_0, \tilde{e}_1\rangle = \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0,$$

dass $e_0 := \sqrt{\frac{1}{2}}\,\tilde{e}_0$ und $e_1 := \sqrt{\frac{3}{2}}\,\tilde{e}_1$ eine ONB des von $\tilde{e}_0,\ \tilde{e}_1$ aufgespannten Teilraums sind. Also ist

$$\tilde{e}_2 - \Big(\langle \tilde{e}_2, e_0\rangle e_0 + \langle \tilde{e}_2, e_1\rangle e_1\Big) = \tilde{e}_2 - \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,e_1 \underbrace{\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x}_{=0} = \tilde{e}_2 - \tfrac{1}{3}$$

orthogonal zu e_0 und e_1. Da $\left\|\tilde{e}_2 - \frac{1}{3}\right\|^2 = \frac{8}{45}$ ist, setzen wir $e_2 := \sqrt{\frac{45}{8}}\,(\tilde{e}_2 - \frac{1}{3})$.

(b) Wie in Aufgabe G18 erhalten wir

$$Pf_1 = \sum_{i=0}^{2} \langle f_1, e_i\rangle e_i = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,e_0 \underbrace{\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x}_{=0} + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,e_1 \int_{-1}^{1} x^4\,\mathrm{d}x + \sqrt{\tfrac{45}{8}}\,e_2 \underbrace{\int_{-1}^{1} x^5 - \tfrac{1}{3}x^3\,\mathrm{d}x}_{=0} = \tfrac{2}{5}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,e_1 = \tfrac{3}{5}\,\tilde{e}_1,$$

d.h. $Pf_1(x) = \frac{3}{5}x$. Außerdem gilt

$$Pf_2 = \sum_{i=0}^{2} \langle f_2, e_i\rangle e_i = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,e_0 \underbrace{\int_{-1}^{1} \sin x\,\mathrm{d}x}_{=0} + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,e_1 \int_{-1}^{1} x \sin x\,\mathrm{d}x + \sqrt{\tfrac{45}{8}}\,e_2 \underbrace{\int_{-1}^{1} \sin x\,(x^2 - \tfrac{1}{3})\,\mathrm{d}x}_{=0}$$

$$= \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,e_1 \left(\Big[-x\cos x\Big]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \cos x\,\mathrm{d}x \right) = \tfrac{3}{2}\,\tilde{e}_1 \Big(2\cos(1) + 2\sin(1)\Big) = \Big(3\cos(1) + 3\sin(1)\Big)\tilde{e}_1,$$

d.h. $Pf_2(x) = 3x\cos(1) + 3x\sin(1)$.

Aufgabe G33 (Separabilität)
Wie in der Vorlesung heißt ein Banachraum *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

(a) Sei $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass $\ell^p(\mathbb{N})$ separabel ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\ell^\infty(\mathbb{N})$ nicht separabel ist.
Hinweis: Finden Sie eine überabzählbare Teilmenge in der Einheitskugel, deren Elemente voneinander große Abstände haben.

(c) Zeigen Sie: Ist E Banachraum und $H \subseteq E$ ein abgeschlossener Teilraum, dann ist E genau dann separabel, wenn E/H und H separabel sind.

(d) Zeigen Sie, dass der Quotient $\ell^\infty(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$ nicht separabel ist.

Lösungshinweise:

(a) Die Menge der finiten Folgen, deren Einträge rationalen Real- und Imaginärteil haben, ist abzählbar und dicht in $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$.

(b) Sei A eine dichte Teilmenge von $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Dann existiert insbesondere für alle $x \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ ein $a \in A$, so dass $\|x - a\| \leq \frac{1}{3}$ ist.
Da die Differenz zweier 0-1-Folgen verschiedener y_1, y_2 die Norm 1 hat, kann für ein $a \in A$ nicht zugleich $\left\|y_1 - a\right\| \leq \frac{1}{3}$ und $\left\|y_2 - a\right\| \leq \frac{1}{3}$ gelten. Die Mächtigkeit von A ist also größer als die der Menge der 0-1-Folgen. Also ist A überabzählbar.

(c) Sei E separabel und $F \subseteq E$ eine abzählbare dichte Teilmenge. Dann ist auch F/H separabel und dicht in E/H. Außerdem ist natürlich auch jeder Teilraum von E separabel.

Seien $H \leq E$ und E/H separabel, $\{[x_n] \in E/H \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ und $\{h_m \in H \,:\, m \in \mathbb{N}\}$ dichte Teilmengen, sowie $\varepsilon > 0$ und $x \in E$.
Dann existieren $n_0 \in \mathbb{N}$ und $h \in H$, so dass $\left\|[x] - [x_{n_0}]\right\|_0 \leq \frac{\varepsilon}{3}$ und $\left\|(x - x_{n_0}) - h\right\| \leq \left\|[x - x_{n_0}]\right\|_0 + \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{2\varepsilon}{3}$. Außerdem gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\left\|h - h_{m_0}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ und wir erhalten:

$$\left\|x - (x_n + h_m)\right\| = \left\|x - x_n - h + h - h_m\right\| \leq \left\|x - x_n - h\right\| + \left\|h - h_m\right\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Also ist $\{(x_n + h_m) \in E \,:\, n, m \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge von E.

(d) Da $c_0(\mathbb{N})$ separabel ist (vgl. (a)), folgt dies aus (b) und (c).

Aufgabe G34 (Basis von $\ell^2(\mathbb{N})$)
Zeigen Sie: Jede Basis (nicht Orthonormalbasis) eines unendlich-dimensionalen separablen Hilbertraumes ist überabzählbar.
Hinweis: Zeigen Sie: Existiert eine abzählbare Basis, so existiert auch eine abzählbare Basis, die gleichzeitig ein Orthonormalsystem ist.

Lösungshinweise: Sei B eine Basis (i.S.d. linearen Algebra) eines unendlich-dimensionalen Hilbertraumes $\mathscr{H}$. Dann existiert nach Gram-Schmidt eine abzählbare Basis B' mit paarweise orthogonalen Vektoren der Norm 1, d.h. B' ist eine ONB von $\mathscr{H}$. Also ist $\mathscr{H}$ isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N})$.
Da jedes $x \in \mathscr{H}$ als (endliche) Linearkombination von Elementen aus B' geschrieben werden kann, ist $\mathscr{H}$ ebenfalls isomorph zu den finiten Folgen – ein Widerspruch, da diese nicht vollständig sind.

Aufgabe G35 (Hilbertraum der fastperiodischen Funktionen)
Sei $\mathcal{F}$ die lineare Hülle der Funktionen $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{i\omega x}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie:

$$\langle f, g \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

definiert ein Skalarprodukt auf $\mathcal{F}$, dass heißt, $\mathcal{F}$ ist ein Prä-Hilbertraum.

(b) Sei $\mathscr{H}$ die Vervollständigung von $\mathcal{F}$. ($\mathscr{H}$ heißt *Hilbertraum der fastperiodischen Funktionen*.) Finden Sie eine ONB für $\mathscr{H}$ und berechnen Sie seine Dimension, indem Sie einen Isomorphismus zu einem geeigneten $\ell^2(I)$ angeben (I=Indexmenge). Ist $\mathscr{H}$ separabel?

Bemerkung: Man kann $\mathcal{F} \subseteq C_b(\mathbb{R})$, wobei $C_b(\mathbb{R})$ für die gleichmäßig beschränkten stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ steht, auch in der Supremumsnorm abschließen. Dann erhält man die sogenannten *fastperiodischen Funktionen*. Sie wurden von Harald Bohr, dem Bruder des Physikers und Nobelpreisträgers Nils Bohr, in die Mathematik eingeführt.

Lösungshinweise: Sei $e_\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto e^{i\omega x}$, $\omega \in \mathbb{R}$, dann gilt für $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ mit $\omega_1 \neq \omega_2$:

$$\begin{aligned}
\langle e_{\omega_1}, e_{\omega_2} \rangle &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i\omega_1 x}\overline{e^{i\omega_2 x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i(\omega_1-\omega_2)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left[\frac{1}{i(\omega_1-\omega_2)} e^{i(\omega_1-\omega_2)x} \right]_{-T}^{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{e^{i(\omega_1-\omega_2)T} - e^{-i(\omega_1-\omega_2)T}}{2i(\omega_1-\omega_2)T} \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{2i\sin\big((\omega_1-\omega_2)T\big)}{2i(\omega_1-\omega_2)T} = 0.
\end{aligned}$$

Für $\omega_1 = \omega_2$ ist $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i\omega_1 x}\overline{e^{i\omega_2 x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{T\to\infty} \frac{2T}{2T} = 1$. Also existiert der Grenzwert für alle $f, g \in \mathcal{F}$ und $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ist wohldefiniert (und offensichtlich sesquilinear und positiv definit).
Da $\{e_\omega : \omega \in \mathbb{R}\}$ nach Definition total in $\mathscr{H}$ ist, zeigen obige Rechnungen, dass $(e_\omega)_{\omega\in\mathbb{R}}$ eine ONB von $\mathscr{H}$ ist. Also ist $\mathscr{H} \cong \ell^2(\mathbb{R})$ und damit nicht separabel.

Aufgabe G36 (Faltung)

(a) Zeigen Sie: Für Funktionen $f, g \in L^1\big([0,2\pi], \frac{\lambda}{2\pi}\big)$ gilt die Ungleichung (λ=Lebesgue-Maß)

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

(b) Zeigen Sie, dass $f * g$ stetig ist für $f, g \in L^2\big([0,2\pi], \frac{\lambda}{2\pi}\big)$.
Hinweis: Wir sieht die Fouriertransformierte von $f * g$ aus?

Lösungshinweise:

(a) Für $f, g \in L^1\big([0,2\pi], \frac{\lambda}{2\pi}\big)$ gilt mit Fubini:

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \int_0^{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(x-y)\overline{g(y)}\,\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \leq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \big|f(x-y)\big|\,\big|g(y)\big|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} \big|g(y)\big| \int_0^{2\pi} \big|f(x-y)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \|f\|_1 \int_0^{2\pi} \big|g(y)\big|\,\mathrm{d}y = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.
\end{aligned}$$

(b) Aus $a_n := \widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n) \cdot \hat{g}(n)$ folgt mit Cauchy-Schwarz, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ist. Da $\big\|e_n\big\|_\infty = \sup_{t\in[0,2\pi]} \big|e^{int}\big| = 1$ ist, folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big\|a_n e_n + a_{-n} e_{-n}\big\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \big\|a_n e_n\big\|_\infty + \big\|a_{-n} e_{-n}\big\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \big|a_n\big| + \big|a_{-n}\big| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|a_n\big| < \infty.$$

Damit konvergiert $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ (vgl. Lemma 2.7), d.h. dass die Folge der Partialsummen $\big(\sum_{n=-N}^{N} a_n e_n\big)_{N\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert. Also ist $f * g$ der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen und damit stetig.

Hausübung

Aufgabe H22 (Konkrete Orthonormalbasen: Rademacher- und Walsh-Funktionen) (1 Punkt)
Gegeben seien die Abbildungen

$$\Phi : [0,1) \to [0,1),\, x \mapsto 2x \bmod 1 \quad \text{und} \quad f : [0,1) \to \mathbb{R},\, f(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le y < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} \le y < 1. \end{cases}$$

Sei $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := (f \circ \Phi^n)(x)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

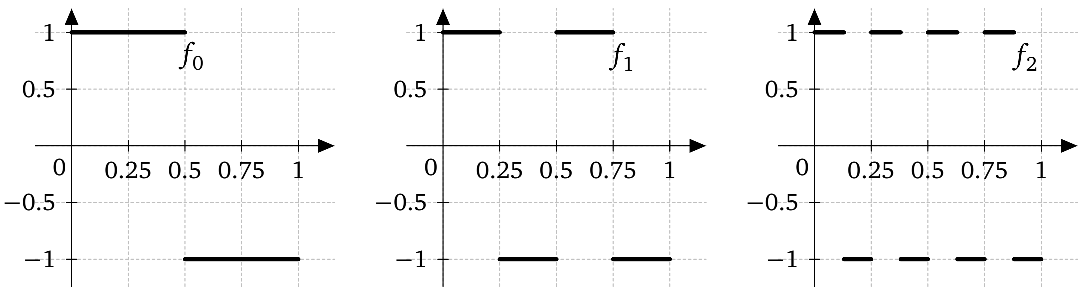
(a) Wie sehen die Funktionen f_n aus? Finden Sie eine explizite Darstellung für diese Funktionen und skizzieren Sie sie (*Rademacher-Funktionen*).

(b) Zeigen sie, dass $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem in $L^2([0,1))$ ist.

(c) Ergänzen $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ zu einer ONB von $L^2([0,1))$.
Hinweis: Welche Funktionen lassen sich durch Produkte aus den ersten n Rademacher-Funktionen gewinnen?
Die Funktionen der ONB, die Sie wahrscheinlich konstruiert haben, heißen auch *Walsh-Funktionen*.

Lösungshinweise:

(a) Es gilt $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } \frac{2k}{2^{n+1}} \le x < \frac{2k+1}{2^{n+1}}, \\ -1, & \text{für } \frac{2k+1}{2^{n+1}} \le x < \frac{2k+2}{2^{n+1}} \end{cases}$ für $k = 0, \ldots, 2^n - 1$.



(b) Man sieht sofort, dass $\|f_n\| = 1$ ist, und $\langle f_n, f_m \rangle = \int_0^1 f_n \overline{f_m}\, \mathrm{d}\lambda = \delta_{n,m}$ (Kronecker-Delta) folgt, da das Produkt für $m < n$ auf jedem Intervall, auf dem f_m konstant ist, zu gleichen Teilen positives und negatives Vorzeichen erhält.

(c) Die Menge $M := \left\{ \prod_{k=1}^m f_{n_k} \,:\, f_{n_k} \text{Rademacher-Funktion} \right\}$ ist offensichtlich ein ONS. M ist auch total in $L^2([0,1))$, da gilt:
- $\chi_{I_{k,n}} \in \operatorname{span} M$ mit $I_{k,n} := \left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right]$, $k = 0, \ldots, 2^{n+1} - 1$,
- damit ist $\mathcal{C}_c([0,1)) \subseteq \overline{\operatorname{span} M}$,
- $\mathcal{C}_c([0,1))$ ist dicht in $L^2([0,1))$.

Aufgabe H23 (Hardyraum) (1 Punkt)
Sei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe der komplexen Ebene und $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ der Vektorraum der auf $\mathbb{D}$ holomorphen Funktionen.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $0 < r < 1$ ist $\|f\|_r := \left(\int_0^{2\pi} |f(r \cdot e^{it})|^2 \, \mathrm{d}t \right)^{1/2}$ eine Norm auf $\mathscr{H}(\mathbb{D})$, die diesen Raum zu einem Prä-Hilbertraum macht.
Hinweis: Verwenden Sie den Identitätssatz für holomorphe Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $0 < r < 1$ die Funktionen $\{z \mapsto z^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ total in diesem Prä-Hilbertraum sind.

(c) Berechnen Sie aus (b) eine ONB für diesen Prä-Hilbertraum.

(d) Berechnen Sie $\|f\|_r$ für $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$.

(e) Zeigen Sie: Für $0<r<r'<1$ ist $\|f\|_r \leq \|f\|_{r'}$.

(f) Sei $\mathscr{H}_2(\mathbb{D}) := \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}) : \|f\|_2 := \sup_{0<r<1} \|f\|_r < \infty\}$.
Weisen Sie nach, dass f mit $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ genau dann ein Element von $\mathscr{H}_2(\mathbb{D})$ ist, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ ist. Zeigen Sie ferner, dass $\mathscr{H}_2(\mathbb{D})$ ein Hilbertraum ist.

(g) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\delta_{z_0} : \mathscr{H}_2(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}, f \mapsto f(z_0)$ für jedes $z_0 \in D$ ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathscr{H}_2(\mathbb{D})$ ist. Nach dem Satz von Riesz-Fréchet existiert daher ein $g \in \mathscr{H}_2(\mathbb{D})$ mit $\delta_{z_0}(f) = \langle f, g\rangle_{\mathscr{H}_2(\mathbb{D})}$ für alle $f \in \mathscr{H}_2(\mathbb{D})$. Bestimmen Sie g.

Lösungshinweise:

(a) $\|\cdot\|_r$ entspricht der $\|\cdot\|_2$-Norm auf dem Kreis $\{z \in \mathbb{C} : r = |z|\}$ und ist damit eine Seminorm.
Aus $\left\|f\right\|_r = 0$ folgt $f(re^{it}) = 0$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Mit dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen folgt $f \equiv 0$ auf $\mathbb{D}$; $\|\cdot\|_r$ ist also eine Norm. Das zugehörige Skalarprodukt ist gegeben durch:

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(re^{it})\overline{g(re^{it})}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Sei $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, dann ist $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{D}$, und die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig auf $\overline{K_R(0)}$ mit $0<r<R<1$. Für $f_N(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ gilt:

$$\left\|f - f_N\right\|_r = \left(\int_0^{2\pi} |f-f_N|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leq \left\|f-f_N\right\|_\infty \left(\int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\lambda\right)^{1/2} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Damit folgt die Behauptung.

(c) Sei $\hat{e}_n(z) := z^n$, dann gilt:

$$\langle \hat{e}_n, \hat{e}_m\rangle = \int_0^{2\pi} r^{n+m} e^{i(n-m)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & \text{für } n \neq m, \\ 2\pi r^{2n}, & \text{für } n = m. \end{cases}$$

Also ist durch $\left\{ e_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi} r^n}\hat{e}_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ eine ONB gegeben.

(d) Aus $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{2\pi}\, r^n e_n(z)$ folgt:

$$\left\|f\right\|_r = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|\langle f, e_n\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n \sqrt{2\pi}\, r^n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n\right|^2 r^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(e) Folgt aus (d).

(f) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, dann ist $\left\|f\right\|_r^2 \leq 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ für alle $0<r<1$, d.h. $f \in \mathscr{H}_2(\mathbb{D})$.
Sei $f \in \mathscr{H}_2(\mathbb{D})$, dann existiert $\lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n\right|^2 r^{2n} =: c$ und für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 = \lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{N} \left|a_n\right|^2 r^{2n} \leq \lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n\right|^2 r^{2n} = c.$$

Daraus ergibt sich die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ und wir erhalten $\left\|f\right\|_2 = \sqrt{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, sowie $\mathscr{H}_2(\mathbb{D}) \cong \ell^2(\mathbb{N}_0)$, wobei der Isomorphismus gegeben ist durch

$$U : \mathscr{H}_2(\mathbb{D}) \to \ell^2(\mathbb{N}_0) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mapsto (\sqrt{2\pi}\, a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

(g) Das Funktional δ_{z_0} ist stetig, denn mit Cauchy-Schwarz gilt für $z_0 \in \mathbb{D}$:

$$\left|f(z_0)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n\right| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_0^n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\|f\right\|_2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} |z_0^n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Setze $b_n := \frac{1}{2\pi} \bar{z}_0^n$ und $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} (\bar{z}_0 z)^n = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-\bar{z}_0 z}$, dann gilt:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n\rangle \overline{\langle g, e_n\rangle} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{2\pi}\, a_n \overline{\sqrt{2\pi}\, b_n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi\, a_n \tfrac{1}{2\pi} z_0^n = f(z_0).$$