Funktionalanalysis
7. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
29./30. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G27 (Gleichheit von Hilbertraum-Vektoren)
Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und $x, y \in \mathscr{H}$ mit $\|x\| = 1 = \|y\|$. Zeigen Sie, dass aus $\langle x, y\rangle = 1$ folgt, dass $x = y$ ist.

Lösungshinweise: Da Cauchy-Schwarz mit Gleichheit erfüllt ist, gilt $x = \lambda y$ für ein $\lambda \in \mathscr{K}$. Aus $1 = \langle x, y\rangle = \langle \lambda y, y\rangle = \lambda \|y\|^2 = \lambda$ folgt dann $\lambda = 1$ bzw. $x = y$.

Aufgabe G28 (Adjungierte)
Sei $S : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ der Rechtsshift, d.h., $(Sf)(n) := \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0, \\ f(n-1), & \text{für } n \geq 1. \end{cases}$
Berechnen Sie S^*. Ist S unitär?

Lösungshinweise: Sei $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$, $(Tf)(n) := f(n+1)$, dann gilt für $f, g \in \ell^2(\mathbb{N})$:

$$\begin{aligned}\langle Sf, g\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty}(Sf)(n)\overline{g(n)} = (Sf)(0)\overline{g(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}(Sf)(n)\overline{g(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1)\overline{g(n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\overline{g(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\overline{(Tg)(n)} = \langle f, Tg\rangle.\end{aligned}$$

Also ist $S^* = T$. Der Rechtsshift S ist isometrisch aber nicht unitär, da für $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ gilt:

$$\begin{aligned}(f_0, f_1, f_2, \ldots) &\overset{S}{\mapsto} (0, f_0, f_1, \ldots) \overset{S^*}{\mapsto} (f_0, f_1, f_2, \ldots), \quad \text{d.h. } S^*S = \mathbb{1}, \\ (f_0, f_1, f_2, \ldots) &\overset{S^*}{\mapsto} (f_1, f_2, f_3 \ldots) \overset{S}{\mapsto} (0, f_1, f_2, \ldots), \quad \text{d.h. } SS^* \neq \mathbb{1}.\end{aligned}$$

Aufgabe G29 (Positiv ist nicht gleich positiv)
Finden Sie Beispiele von Matrizen A und B, so dass A nicht-negative Einträge hat, A aber trotzdem nicht positiv semidefinit ist, während B positiv semidefinit ist, aber trotzdem auch negative Einträge hat.

Lösungshinweise: Man kann beispielsweise $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ wählen.

Aufgabe G30 (Algebraische Charakterisierung von Operatoren 1)
Seien $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ komplexe Hilberträume, $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ und $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$. Zeigen Sie:

(a) T ist *positiv (semidefinit)*, falls ein $R \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ mit $T = R^*R$ existiert.

(b) T ist genau dann *hermitesch* (bzw. *selbst-adjungiert*), wenn $T = T^*$ gilt.

(c) T ist genau dann *normal*, wenn $T^*T = TT^*$ gilt.

(d) Ist T normal und injektiv, dann ist das Bild $\operatorname{ran} T$ dicht in $\mathscr{H}$.
(e) S ist genau dann eine *Isometrie*, wenn $S^*S = \mathbb{1}_{\mathscr{H}}$ gilt.
(f) S ist genau dann eine *Koisometrie*, wenn $SS^* = \mathbb{1}_{\mathscr{H}}$ gilt.
(g) S ist genau dann *unitär*, wenn $S^* = S^{-1}$ gilt (d.h. $S^*S = \mathbb{1}_{\mathscr{H}}$ und $SS^* = \mathbb{1}_{\mathscr{H}}$).

Lösungshinweise:

(a) Für alle $x \in \mathscr{H}$ gilt $\langle Tx, x\rangle = \langle R^*Rx, x\rangle = \langle Rx, Rx\rangle = \|Rx\|^2 \geq 0$.

(b) Sei $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, dann gilt $\langle T^*x, x\rangle \overset{T^{**}=T}{=} \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle Tx, x\rangle$ für alle $x \in \mathscr{H}$, woraus $T^* = T$ folgt.
Sei $T^* = T$, dann gilt $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$ und damit $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

(c) Für alle $x \in \mathscr{H}$ folgt aus $\|Tx\| = \|T^*x\|$, dass $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle$ gilt; also ist $T^*T = TT^*$.
Sei $T^*T = TT^*$, dann gilt $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \|T^*x\|^2$ für alle $x \in \mathscr{H}$.

(d) Es gilt: $\overline{\operatorname{ran} T} = (\ker T^*)^\perp = (\ker TT^*)^\perp = (\ker T^*T)^\perp = (\ker T)^\perp = \{0\}^\perp = \mathscr{H}$.

(e) Sei S eine Isometrie, dann gilt $\langle S^*Sx, x\rangle = \langle Sx, Sx\rangle = \|Sx\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ für alle $x \in \mathscr{H}$; also ist $S^*S = \mathbb{1}_{\mathscr{H}}$.
Ist $S^*S = \mathbb{1}_{\mathscr{H}}$, folgt $\|Sx\|^2 = \langle Sx, Sx\rangle = \langle S^*Sx, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$ für alle $x \in \mathscr{H}$.

(f) Wende (e) auf $\tilde{S} := S^*$ an.

(g) Folgt aus (e) und (f), da $\|S^*x\| = \left\|S^*\left((S^{-1})^*S^{-1}\right)x\right\| = \left\|(S^{-1}S)^*S^{-1}x\right\| = \left\|S^{-1}x\right\| = \|x\|$ für $x \in \mathscr{H}$.

Aufgabe G31 (C*-Algebra der stetigen Funktionen)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ kompakt.

(a) Machen Sie sich kurz klar, dass $(\mathcal{C}(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ mit der punktweisen Multiplikation eine C*-Algebra ist.

(b) Wie sehen orthogonale Projektionen, positive Elemente, selbst-adjungierte Elemente, normale Elemente, Isometrien, Koisometrien, unitäre Elemente und partielle Isometrien in $(\mathcal{C}(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ aus? Hierbei seien diese Klassen von Elementen definiert wie in der algebraischen Charakterisierung der entsprechenden Operatoren auf einem Hilbertraum (vgl. Aufgaben G30 und H19).

(c) Wie muss Ω beschaffen sein, damit $\Omega \ni t \mapsto 1$ und $\Omega \ni t \mapsto 0$ nicht die einzigen orthogonalen Projektionen sind?

Lösungshinweise:

(a) Mit punktweise definierten Operationen ist $\mathcal{C}(\Omega)$ eine Algebra. Die Involution sei gegeben durch $f^* := \bar{f}$ für $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Dann gilt

$$\left\|f^*f\right\|_\infty = \sup_{t\in\Omega}\left|\overline{f(t)}f(t)\right| = \sup_{t\in\Omega}\left|f(t)\right|^2 = \left\|f\right\|_\infty^2.$$

(b) *orthogonale Projektionen:* $\operatorname{ran} f \subseteq \{0,1\}$, $\mathbb{1} \equiv 1$.
positiv: Ist $f = g^*g$, dann gilt $f(t) = \overline{g(t)}g(t) = \left|g(t)\right|^2$ für alle $t \in \Omega$, d.h. $\operatorname{ran} f \subseteq [0,\infty)$.
selbst-adjungiert: Aus $f = f^*$ folgt $f(t) = \overline{f(t)}$ für alle $t \in \Omega$, d.h. $\operatorname{ran} f \subseteq \mathbb{R}$.
Isometrie / Koisometrie / unitär: Aus $f^*f = \mathbb{1}$ folgt $ff^* = \mathbb{1}$, da $\mathcal{C}(\Omega)$ kommutativ ist, und $1 = \overline{f(t)}f(t) = \left|f(t)\right|^2$ für alle $t \in \Omega$, d.h. $\operatorname{ran} f \subseteq \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
partielle Isometrie: Ist f^*f eine orthogonale Projektion, dann ist $\overline{f(t)}f(t) = \left|f(t)\right|^2 \in \{0,1\}$ für $t \in \Omega$, d.h. $\operatorname{ran} f \subseteq \mathbb{T} \cup \{0\}$.

(c) Dies ist der Fall, wenn Ω mehrere Zusammenhangskomponenten hat.

Hausübung

Aufgabe H19 (Algebraische Charakterisierung von Operatoren 2) (1 Punkt)
Seien $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ komplexe Hilberträume, $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ und $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$. Zeigen Sie:

(a) T ist genau dann eine *orthogonale Projektion*, wenn $T^2 = T = T^*$ gilt.

(b) S ist genau dann eine *partielle Isometrie*, wenn S^*S eine orthogonale Projektion ist.

(c) Ist S eine partielle Isometrie, dann ist auch S^* eine partielle Isometrie.

Hinweis: Warum ist das Bild $\operatorname{ran} S$ von S ein abgeschlossener Teilraum von $\mathscr{K}$?

Bemerkung: Man nennt S^*S *initiale Projektion* und SS^* *finale Projektion* für S. Entsprechend heißt $S^*S\mathscr{H}$ *initialer Teilraum* und $SS^*\mathscr{K}$ *finaler Teilraum* für S.

Lösungshinweise:

(a) Sei T die orthogonale Projektion auf $M := T\mathscr{H}$. Dann gilt $T^2 = T$ und alle $x, y \in \mathscr{H}$ können in $x = x_0 + x_1$ bzw. $y = y_0 + y_1$ mit $x_0, y_0 \in M$ und $x_1, y_1 \in M^\perp$ zerlegt werden. Damit folgt $T^* = T$ aus

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x_0, y_0 + y_1\rangle = \langle x_0, y_0\rangle = \langle x_0 + x_1, y_0\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Sei $T^2 = T = T^*$, dann ist $M := \{x \in \mathscr{H} : Tx = x\}$ ein abgeschlossener Teilraum und $T^2 = T$ impliziert $M = \operatorname{ran} T$. Weiter gilt für $x \in \mathscr{H}$ und $y \in M$:

$$\langle Tx - x, y\rangle = \langle Tx - x, Ty\rangle = \langle T^*(Tx - x), y\rangle = \langle T(Tx - x), y\rangle = \langle Tx - Tx, y\rangle = 0.$$

(b) Sei S eine partielle Isometrie und P die orthogonale Projektion auf den abgeschlossenen Teilraum $M \subseteq \mathscr{H}$, auf dem S isometrisch wirkt. Dann kann jedes $x \in \mathscr{H}$ zerlegt werden in $x = x_0 + x_1$ mit $x_0 \in M$ und $x_1 \in M^\perp$ und es gilt:

$$\langle S^*Sx, x\rangle = \|Sx\|^2 = \left\|Sx_0 + Sx_1\right\|^2 = \left\|Sx_0\right\|^2 = \left\|x_0\right\|^2 = \langle x_0, x_0\rangle = \langle x_0, x_0 + x_1\rangle = \langle Px, x\rangle,$$

woraus $S^*S = P$ folgt.
Sei S^*S eine orthogonale Projektion und $M := S^*S\mathscr{H}$. Dann gilt für $x \in M$ und $y \in M^\perp$:

$$\|Sx\|^2 = \langle S^*Sx, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2, \qquad y \in \ker S^*S = \ker S, \ \text{d.h.}\ Sy = 0.$$

(c) Sei $N := \operatorname{ran} S = SM$ mit $M := S^*S\mathscr{H}$. Dann ist N abgeschlossen, da S isometrisch auf M wirkt. Für alle $y_0 \in N$ existiert also genau ein $x_0 \in M$, so dass $Sx_0 = y_0$ ist, und es folgt (mit $S^*Sx_0 = x_0$ und S isometrisch auf M):

$$\left\|S^*y_0\right\| = \left\|S^*(Sx_0)\right\| = \left\|x_0\right\| = \left\|Sx_0\right\| = \left\|y_0\right\|.$$

Da $\ker S^* = (\operatorname{ran} S)^\perp = N^\perp$ ist, folgt für alle $y_1 \in N^\perp$, dass $S^*y_1 = 0$ gilt.

Aufgabe H20 (Netzkonvergenz) (1 Punkt)
Sei J eine beliebige Menge, $(x_j)_{j\in J} \subseteq \mathbb{C}$, so dass $\sum_{j\in J} x_j$ konvergiert. Zeigen Sie

(a) Die Menge $J_0 := \{j \in J : x_j \neq 0\} \subseteq J$ ist höchstens abzählbar.

Hinweis: Für wie viele $j \in J$ kann $|x_j| > \varepsilon > 0$ sein?

(b) Ist $J = \mathbb{N}$, so ist $\sum_{j\in J} x_j$ genau dann konvergent im Sinn von 6.2, wenn $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_j$ absolut konvergiert.

Lösungshinweise:

(a) Für jedes $\varepsilon > 0$ kann es natürlich nur endlich viele $j \in J$ mit $|x_j| > \varepsilon > 0$ geben. Also ist $\left|J_n\right| < \infty$ für jedes $J_n := \left\{j \in J \,:\, \left|x_j\right| > \frac{1}{n}\right\}$ und damit $J_0 := \bigcup_{n\geq 1} J_n$ höchstens abzählbar.

(b) Sei $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_j$ absolut konvergent und $g := \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt: $\sum_{j\geq n} \left|x_j\right| < \varepsilon$. Sei $J_\varepsilon := \{1, 2, \ldots, n_\varepsilon\}$, dann gilt für alle endlichen Mengen $A \subseteq J$ mit $J_\varepsilon \subseteq A$:

$$\left|\sum_{j\in A} x_j - g\right| = \left|\sum_{j\in A} x_j - \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j\right| \leq \left|\sum_{j>n_\varepsilon} x_j\right| \leq \sum_{j\geq n_\varepsilon} \left|x_j\right| < \varepsilon.$$

Also konvergiert das Netz $\left(\sum_{j\in A} x_j\right)_{A\subseteq J,\, |A|<\infty}$ gegen g.

Aus der Konvergenz von $\sum_{j\in J} x_j$ im Sinn von 6.2 folgt, dass jede Umordnung der Reihe konvergiert. Nach dem Umordnungssatz ist $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_j$ damit auch absolut konvergent.

Aufgabe H21 (Polardarstellung) (1 Punkt)

Seien $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ Hilberträume.

(a) Zeigen Sie: Für $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ existiert eine (eindeutige) partielle Isometrie $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$, so dass

$$A = V|A| \quad \text{und} \quad \ker A = \ker V \text{ ist,}$$

wobei $|A| := (A^*A)^{1/2}$ die Wurzel des positiven Elements $A^*A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ ist, d.h. $|A|^2 = A^*A$.

(Für unendlich-dimensionale Hilerträume können Sie die Existenz von $|A|$ annehmen; wie sehen Sie die Existenz im endlich-dimensionalen Fall?)

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathscr{H}$ ist $\|\, |A|x \,\|_{\mathscr{H}} = \|Ax\|_{\mathscr{K}}$.

(ii) Sei $|A|\mathscr{H} := \{|A|x \,:\, x \in \mathscr{H}\} \subseteq \mathscr{H}$. Betrachten Sie die Abbildung $V_0 : |A|\mathscr{H} \to \mathscr{K}$, $|A|x \mapsto Ax$. Zeigen Sie, dass V_0 eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

(iii) „Ergänzen" Sie V_0 zu einer partiellen Isometrie $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$.

(iv) Zeigen Sie: V ist die gewünschte partielle Isometrie (sie ist auch durch die obigen Bedingungen eindeutig festgelegt).

(b) Weisen Sie nach, dass $V^*A = |A|$ ist.

(c) Aus einem Numerik Buch:

Zu jeder (reellen) $m \times n$-Matrix A existieren orthogonale Matrizen U und V, so dass

$$U^t AV = diag(s_1, s_2, \ldots) = S.$$

Die sogenannten singulären Werte $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_l > s_{l+1} = s_{l+2} = \ldots = 0$ sind die Wurzeln der Eigenwerte von A^tA, l ist der Rang der Matrix A und die Spalten von U bzw. V sind Eigenvektoren von AA^t bzw. A^tA.

Was hat diese „Singulärwertzerlegung" mit der Polardarstellung zu tun?

Lösungshinweise:

(a) Für alle $x \in \mathscr{H}$ gilt:

$$\||A|\, x\|^2_{\mathscr{H}} = \langle |A|\, x, |A|\, x\rangle_{\mathscr{H}} = \langle |A|\, |A|\, x, x\rangle_{\mathscr{H}} = \langle A^*A x, x\rangle_{\mathscr{H}} = \langle Ax, Ax\rangle_{\mathscr{K}} = \|Ax\|^2_{\mathscr{K}}.$$

Damit folgt aus $|A|\, x = 0$ mit $\|Ax\|_{\mathscr{K}} = \||A|\, x\|_{\mathscr{H}} = 0$ auch $V_0(|A|\, x) = Ax = 0$. Also ist V_0 wohldefiniert. Sei $\tilde{V}_0$ die eindeutige Fortsetzung von V_0 auf $\overline{\operatorname{ran} |A|}$, dann ist $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ definiert durch

$$V(x) := \begin{cases} \tilde{V}_0(x), & \text{für } x \in \overline{\operatorname{ran} |A|}, \\ 0, & \text{für } x \in (\operatorname{ran} |A|)^\perp \end{cases}$$

eine partielle Isometrie. Es gilt $\ker V = (\operatorname{ran}|A|)^\perp = \ker|A| = \ker A$ und damit $V|A|x = Ax$ für alle $x \in \mathscr{H}$.

(b) Da V^*V die orthogonale Projektion auf $\overline{\operatorname{ran}|A|}$ ist, folgt $|A| = V^*V|A| = V^*A$ aus $V|A| = A$.

(c) Ist A eine reelle Matrix mit $A = V|A|$, dann ist $V^* = V^t$ und für die positive Matrix $|A|$ existiert eine orthogonale Matrix U, so dass die Matrix $S := U^t|A|U$ diagonal ist. Also gilt:

$$S = U^t|A|U = U^tV^tAU = (VU)^tAU.$$