Funktionalanalysis
6. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
22./23. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G22 (Schwache Ableitungen)
Sei $\mathcal{D} := \{f \in \mathcal{C}^\infty([-1,1]) : f(-1) = 0 = f(1)\} \subseteq L^2([-1,1])$.

(a) Sind die Funktionen $f_1, f_2 \in L^2([-1,1])$ mit $f_1(x) := |x|$ und $f_2 := \chi_{[0,1]}$ schwach differenzierbar, d.h. existiert $g_i \in L^2([-1,1])$, so dass $-\langle f_i, \varphi' \rangle = \langle g_i, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt? Bestimmen Sie ggf. die schwache Ableitung von f_i.

(b) Zeigen Sie, dass für $f \in L^2([-1,1])$ äquivalent sind:

(i) f ist schwach differenzierbar,

(ii) f ist das unbestimmte Integral einer Funktion $g \in L^2([-1,1])$, d.h. für fast alle $x \in [-1,1]$ gilt:

$$f(x) = f(-1) + \int_{-1}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Lösungshinweise:

(a) Für $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt:

$$-\langle f_1, \varphi' \rangle = \int_{-1}^{0} x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} x\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

und

$$-\langle f_2, \varphi' \rangle = -\int_{0}^{1} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(1) + \varphi(0) = \varphi(0)\,.$$

Also ist $g_1(x) = \begin{cases} -1, & \text{für } x < 0 \\ 1, & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ und eine Funktion $g_2 \in L^2([-1,1])$, so dass $-\langle f_2, \varphi' \rangle = \langle g_2, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}$ ist, kann es nicht geben, da das Funktional $L^2([-1,1]) \supseteq \mathcal{D} \ni \varphi \mapsto \varphi(0)$ nicht stetig ist (betrachte $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ mit $\operatorname{supp}\varphi_n \subseteq [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ und $\varphi_n(0) = 1$).

(b) Sei $g \in L^2([-1,1])$ die schwache Ableitung von f und $G(x) := \int_{-1}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$. Dann ist G nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral fast überall differenzierbar und $G' = g$ gilt fast überall. Daraus folgt $-\langle G, \varphi' \rangle = \langle g, \varphi \rangle$ für $\varphi \in \mathcal{D}$ und wir erhalten

$$-\langle G - f, \varphi' \rangle = -\langle G, \varphi' \rangle + \langle f, g \rangle = \langle g, \varphi \rangle - \langle g, \varphi \rangle = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D},$$

bzw. $\left(\text{da } \varphi' \in \mathcal{C}^\infty([-1,1]) \text{ ist mit } \langle \varphi', 1 \rangle = \int_0^1 \varphi' \,\mathrm{d}\lambda = \varphi(1) - \varphi(0) = 0\right)$

$$\langle G - f, \psi \rangle = 0 \qquad \forall\, \psi \in \mathcal{D}' := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty([-1,1]) : \langle f, 1 \rangle = 0 \right\}.$$

Da $\left\{ \left(\varphi - \frac{1}{2}\langle \varphi, 1 \rangle 1\right) : \varphi \in \mathcal{D} \right\} \subseteq \mathcal{D}'$ gilt und $\mathcal{D}$ total ist in $L^2([-1,1])$, ist auch $\mathcal{D}'$ total in $\{1\}^\perp \subseteq L^2([-1,1])$. Es folgt $G - f = c$ fast überall für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$, d.h. für fast alle $x \in [0,1]$ gilt $f(x) = c + \int_{-1}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Aus (ii) folgt, dass f fast überall differenzierbar ist und fast überall $f' = g$ gilt. Außerdem lässt sich für unbestimmte Integrale die Regel der partiellen Integration anwenden (vgl. J. Elstrodt: *Maß- und Integrationstheorie*, 4. Aufl., VII.4.16, S. 306). Also ist $g \in L^2([-1,1])$ die schwache Ableitung von f.

(N.B.: $f_2 \in L^2([-1,1])$ aus (a) ist f.ü. differenzierbar, aber *nicht* schwach differenzierbar.)

Aufgabe G23 (Lax-Milgram 1)

Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum, $(F, \|\cdot\|_F)$ ein normierter Raum und $A : E \to F$ eine stetige lineare Abbildung. Ferner gebe es eine Konstante $c > 0$, sodass $\|Ax\|_F \geq c\|x\|_E$ ist für alle $x \in E$. Zeigen Sie, dass A injektiv ist und dass das Bild $\operatorname{ran} A$ von A abgeschlossen ist.

Lösungshinweise: A ist *injektiv*: Sei $Ax = 0$ für $x \in E$, dann gilt:

$$0 = \|Ax\|_F \geq c\,\|x\|_E \geq 0.$$

Das Bild $\operatorname{ran} A$ ist *abgeschlossen*: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{ran} A \subseteq F$ mit $y := \lim_n y_n$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$, so dass $Ax_n = y_n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist. Dann ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und mit $\left\|x_m - x_n\right\|_E \leq \frac{1}{c}\left\|Ax_m - Ax_n\right\|_F = \frac{1}{c}\left\|y_m - y_n\right\|_F$ ist auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Da E ein Banachraum ist, konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x \in E$ und aus der Stetigkeit von A folgt $Ax = y$, d.h. $y \in \operatorname{ran} A$.

Aufgabe G24 (Lax-Milgram 2)

Sei $\mathscr{H}$ Hilbertraum, $B : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ eine beschränkte koerzitive Sesquilinearform und $\varphi : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional. Zeigen Sie: Es existiert $z \in \mathscr{H}$ mit $\varphi(x) = \overline{B(z,x)}$ für alle $x \in \mathscr{H}$.

Lösungshinweise: Nach dem Satz von Lax-Milgram existiert ein invertierbarer Operator A, so dass $B(x,y) = \langle Ax, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathscr{H}$ ist. Außerdem existiert nach dem Satz von Riesz-Fréchet ein $z_0 \in \mathscr{H}$ so dass gilt:

$$\varphi(x) = \langle x, z_0 \rangle = \langle x, AA^{-1}z_0 \rangle = \langle x, Az \rangle = \overline{\langle Az, x \rangle} = \overline{B(z,x)}\,,$$

wobei $z := A^{-1}z_0$ sei.

Aufgabe G25 (Rang-1-Operatoren)

(a) Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum, $x, y \in \mathscr{H}$ und $T_{x,y}$ der Operator $\mathscr{H} \ni z \mapsto \langle z, y\rangle x \in \mathscr{H}$. Berechnen Sie die Adjungierte dieses Operators.

(b) Für welche Wahlen von $x, y \in \mathscr{H}$ ist $T_{x,y}$ positiv, hermitesch, eine orthogonale Projektion, eine partielle Isometrie?

(c) (i) Sei $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ mit $\dim(\operatorname{ran} T) = 1$. Zeigen Sie: Es existieren $x, y \in \mathscr{H}$ mit $T = T_{x,y}$.

(ii) Sei nun $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ mit $\dim(\operatorname{ran} T) < \infty$. Zeigen Sie, dass $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathscr{H}$ existieren mit $T = \sum_{i=1}^n T_{x_i,y_i}$.

Anmerkung: $T_{x,y}$ bezeichnet man auch als *Rang-1-Operator*. In der Quantenmechanik schreibt man dafür oft $|x\rangle\langle y|$.

Lösungshinweise:

(a) Seien $z, z' \in \mathscr{H}$, dann gilt:

$$\langle T_{x,y}z, z'\rangle = \langle\langle z, y\rangle x, z'\rangle = \langle z, y\rangle\langle x, z'\rangle = \langle z, \langle z', x\rangle y\rangle = \langle z, T_{y,x}z'\rangle.$$

Also ist $T^*_{x,y} = T_{y,x}$.

(b) positiv: $y = \lambda x$ mit $\lambda \geq 0$,
hermitesch: $y = \lambda x$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$,
orthogonale Projektion: $y = \lambda x$ mit $\lambda = \frac{1}{\|x\|^2}$,
partielle Isometrie: $\|x\| \cdot \left\|y\right\| = 1$.

(c) Sei $0 \neq x \in \operatorname{ran} T$, dann existiert ein lineares Funktional $\varphi : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$, so dass $T(z) = \varphi(z)x$ für $z \in \mathscr{H}$ ist. Mit Riesz-Fréchet existiert genau ein $y \in \mathscr{H}$ mit $\varphi(z) = \langle z, y\rangle$, d.h.

$$T(z) = \varphi(z)x = \langle z, y\rangle x = T_{x,y}(z).$$

Sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis von $\operatorname{ran} T$, dann ex. lineare Funktionale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$, so dass $T(z) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(z)x_i$ ist. Wie oben gibt es damit $y_1, \ldots, y_n \in \mathscr{H}$, so dass für $z \in \mathscr{H}$ gilt:

$$T(z) = \sum_{i=1}^n T_{x_i,y_i}(z).$$

Aufgabe G26 (Adjungierte)

Sei $\mathscr{H} = L^2([0,1])$, $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig und

$$T_K : \mathscr{H} \to \mathscr{H}, \ \ (T_K f)(x) := \int_0^1 K(x, y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie: Ist $K^*(x, y) := \overline{K(y, x)}$, dann ist $(T_K)^* = T_{K^*}$.

Lösungshinweise: Direktes Nachrechnen unter Benutzung von Fubini.

Hausübung

Aufgabe H16 (Ein ziemlich singuläres Maß) (1 Punkt)
Auf dem Intervall $[0,1]$ sei λ das Lebesgue-Maß und $C \subseteq [0,1]$ sei die Cantor-Menge. Zur Erinnerung: Es gilt $\lambda(C) = 0$ und $C = [0,1] \setminus S$ mit

$$S := \left]\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right[\cup \left]\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}\right[\cup \left]\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}\right[\cup \left]\tfrac{1}{27}, \tfrac{2}{27}\right[\cup \left]\tfrac{7}{27}, \tfrac{8}{27}\right[\cup \left]\tfrac{19}{27}, \tfrac{20}{27}\right[\ \ldots$$

(a) Sei eine Funktion τ auf S definiert durch
$\tau(x) = \frac{1}{2}$ für $x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$, $\tau(x) = \frac{1}{4}$ für $x \in \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[$, $\tau(x) = \frac{3}{4}$ für $x \in \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[$,
$\tau(x) = \frac{1}{8}$ für $x \in \left]\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right[$, $\tau(x) = \frac{3}{8}$ für $x \in \left]\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right[$, $\tau(x) = \frac{5}{8}$ für $x \in \left]\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right[$,
$\tau(x) = \frac{7}{8}$ für $x \in \left]\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right[$, $\tau(x) = \frac{1}{16}$ für $x \in \left]\frac{1}{81}, \frac{2}{81}\right[$, etc.
Machen Sie sich klar: τ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer stetigen (Verteilungs-) Funktion τ auf $[0,1]$ (Sie brauchen den Beweis nicht im einzelnen ausarbeiten). τ ist auf S differenzierbar und hat dort die Ableitung 0.

(b) Zeigen Sie: Das zu τ gehörige Maß μ_τ ist singulär bezüglich λ.
Zur Erinnerung: Das Maß μ_τ ist auf der Borel-σ-Algebra von $[0,1]$ definiert durch

$$\mu_\tau([a,b]) = \mu_\tau(]a,b[) = \tau(b) - \tau(a)\,.$$

(c) Zusatz: Zeigen Sie, dass C überabzählbar ist.
Hinweis: Charakterisieren Sie die Punkte $x \in C$ durch ihre triadische Entwicklung.

Lösungshinweise: *Bemerkung:* Es gilt: $\lambda(S) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \ldots = \frac{1}{3}\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3(1-\frac{2}{3})} = 1.$

(a) τ ist stückweise konstant auf der in $[0,1]$ dichten Menge S.

(b) Ist $[a,b] \subseteq S$, dann ist offensichtlich $\mu_\tau([a,b]) = 0$, woraus auch $\mu_\tau(S) = 0$ folgt. Andererseits ist $\mu_\tau([0,1]) = \tau(1) - \tau(0) = 1 - 0 = 1$. Es folgt $\mu_\tau(C) = \mu_\tau([0,1] \setminus S) = 1$. Da $\lambda(C) = 0$ ist, ist μ_τ singulär zu λ.

(c) Sei $x \in [0,1]$, dann existieren $x_n \in \{0,1,2\}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ ist. Nun gilt $x \in C$ genau dann, wenn $x_n \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Wir können die Punkte in C also mit den 0-2-Folgen identifizieren (und die Menge dieser wiederum mit der Potenzmenge von $\mathbb{N}$). Also ist C überabzählbar.

Aufgabe H17 (Ausgleichsrechnung) (1 Punkt)
Seien $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ Hilbertäume, $A : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ eine beschränkte lineare Abbildung mit abgeschlossenem Bild, und sei $b \in \mathscr{K}$ ein vorgegebener Vektor. Zeigen Sie, dass für $x \in \mathscr{H}$ äquivalent sind:

(a) Für alle $z \in \mathscr{H}$ ist $\|Ax - b\| \leq \|Az - b\|$.

(b) Es ist $A^*Ax = A^*b$.

Warum existiert ein solches $x \in \mathscr{H}$, wann ist es eindeutig?

Lösungshinweise: Im abgeschlossenen linearen Teilraum $\operatorname{ran} A$ gibt es ein Element y mit minimalem Abstand zu $b \in \mathscr{H}$ und jedes $y \in \operatorname{ran} A$ hat ein Urbild $x \in \mathscr{H}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\|Ax-b\| \text{ minimal } &\Leftrightarrow (Ax-b) \in (\operatorname{ran} A)^{\perp}\\ &\Leftrightarrow \langle Ax-b, Az\rangle = 0 \quad \forall z \in \mathscr{H}\\ &\Leftrightarrow \langle A^*Ax - A^*b, z\rangle = 0 \quad \forall z \in \mathscr{H}\\ &\Leftrightarrow A^*Ax = A^*b.\end{aligned}$$

Dieses $x \in \mathscr{H}$ ist genau dann eindeutig, wenn A^*A injektiv bzw. äquivalent dazu, wenn A injektiv ist (N.B. $\ker A = \ker A^*A$).

Aufgabe H18 (Riesz-Fréchet) (1 Punkt)
Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Für jedes $f \in \mathcal{C}([0,1])$ sei Φ_f die Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) + ay(t) = f(t), \qquad y(0) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_2) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 \Phi_f(t)\,dt$ ein stetiges lineares Funktional ist.
(b) Bestimmen Sie eine Funktion $g \in L^2([0,1])$, so dass $\varphi(f) = \langle f, g\rangle$ ist.

Lösungshinweise: Da die Differentialgleichung linear ist, ist ihre Lösung Φ_f gegeben durch:

$$\Phi_f(s) = e^{-a(s-t_0)}\left(y_0 + \int_{t_0}^{s} e^{a(t-t_0)} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = e^{-as}\cdot\int_0^s e^{at} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Außerdem erfüllt Φ_f natürlich die Differentialgleichung, d.h. $\Phi_f(t) = \frac{1}{a}\big(f(t) - \Phi_f'(t)\big)$, und es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \int_0^1 \Phi_f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^1 f(t) - \Phi_f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \Phi_f(1) + \underbrace{\Phi_f(0)}_{=0}\right)\\ &= \frac{1}{a}\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - e^{-a}\cdot\int_0^1 e^{at} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 f(t)\, \underbrace{\tfrac{1}{a}\left(1 - e^{a(t-1)}\right)}_{=:g_0(t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \langle f, \overline{g_0}\rangle \;\leq\; \|f\|_2 \cdot \|g_0\|_2.\end{aligned}$$

Alternativ können wir auch $E := \{(s,t) \in [0,1]^2 \,:\, s < t\}$ setzen und erhalten mit Fubini:

$$\begin{aligned}\varphi(f) &= \int_0^1 \Phi_f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-at}\cdot\int_0^t e^{as} f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^1\int_0^1 \chi_E\, e^{-at}\, e^{as} f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1\int_0^1 \chi_E\, e^{-at}\, e^{as} f(s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_0^1 e^{as} f(s) \int_0^1 \chi_E\, e^{-at}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\\ &= \int_0^1 e^{as} f(s) \int_s^1 e^{-at}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_0^1 e^{as} f(s)\left(-\tfrac{1}{a}\left(e^{-a} - e^{-as}\right)\right)\mathrm{d}s\\ &= \int_0^1 f(s)\, \underbrace{\tfrac{1}{a}\left(1 - e^{a(s-1)}\right)}_{=:g_0(s)}\,\mathrm{d}s = \langle f, \overline{g_0}\rangle \;\leq\; \|f\|_2 \cdot \|g_0\|_2.\end{aligned}$$

Also ist φ stetig und für $g := \overline{g_0} \in L^2([0,1])$ gilt $\varphi(f) = \langle f, g\rangle$.