Funktionalanalysis
5. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
15./16. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G18 (Approximation durch Polynome)
Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen a, b, c gibt, so dass

$$\int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 \, dx$$

minimal wird, dass heißt, unter allen Polynomen vom Grad ≤ 2 existiert ein eindeutiges Polynom, welches das Polynom p mit $p(x) = x^3$ im obigen Sinn am besten approximiert. Berechnen Sie die Zahlen a, b, c.

Lösungshinweise: Sei $\mathcal{P}_n := \{p \in \mathcal{C}([-1,1]) : \ p \text{ Polynom mit } \deg(p) \leq n\}$ und $p \in \mathcal{P}_3$ mit $p(x) := x^3$, sowie $q \in \mathcal{P}_2$ mit $q(x) := c\,x^2 + b\,x + a$ für $x \in [-1,1]$. Als endlich-dimensionaler Teilraum von $\mathscr{H} := L^2([-1,1])$ ist $\mathcal{P}_n$ vollständig.
Also existiert die Projektion P_2 von $\mathscr{H}$ auf $\mathcal{P}_2$ und obiges Integral wird minimal, falls $P_2(p) = q$ ist. In diesem Fall ist $p - P_2(p) = p - q \in \mathcal{P}_2^\perp$, d.h. insb. ist $p - q$ orthogonal zu $q_1, q_2, q_3 \in \mathcal{P}_2$ mit $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = x$ und $q_3(x) = x^2$. Aus diesen Bedingungen folgt $a = c = 0$ und $b = \frac{3}{5}$.

Aufgabe G19 (Satz von Hahn-Banach in Hilberträumen)
Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum, M ein linearer Teilraum von $\mathscr{H}$ und $\varphi : M \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional auf M.

(a) Zeigen Sie: Es existiert ein lineares Funktional $\overline{\varphi} : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$, das φ fortsetzt, d.h. $\overline{\varphi}|_M = \varphi$.

(b) Weisen Sie nach, dass es genau eine Fortsetzung $\overline{\varphi}$ gibt mit $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\|$.
(Die Eindeutigkeit ist in vielen Banachräumen falsch!)

(c) Gelten obige Aussagen auch, wenn $\mathscr{H}$ ein Prä-Hilbertraum ist?

Lösungshinweise:

(a) Da φ linear ist, existiert eine eindeutig Fortsetzung $\tilde{\varphi} : \overline{M} \to \mathbb{C}$ mit $\left\|\tilde{\varphi}\right\| = \left\|\varphi\right\|$. Mit dem Satz von Riesz-Fréchet gibt es genau ein $\tilde{x} \in \overline{M}$ mit $\|\tilde{x}\| = \left\|\tilde{\varphi}\right\|$, so dass $\tilde{\varphi}(x) = \langle x, \tilde{x} \rangle$ ist für alle $x \in \overline{M}$. Definieren wir $\overline{\varphi} : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ durch $\overline{\varphi}(x) := \langle x, \tilde{x} \rangle$, $x \in \mathscr{H}$, dann hat $\overline{\varphi}$ die gewünschten Eigenschaften.

(b) Sei $\psi : \mathscr{H} \to \mathbb{C} : x \mapsto \langle x, z \rangle$, $z \in \mathscr{H}$, eine weitere Fortsetzung von φ. Dann folgt aus $\psi(x) = \overline{\varphi}(x) = \langle x, \tilde{x} \rangle$ für alle $x \in \overline{M}$, dass $\tilde{x} - z \in \overline{M}^\perp$ ist und wir erhalten mit dem Satz von Pythagoras:

$$\|z - \tilde{x}\|^2 + \|\tilde{x}\|^2 = \|z\|^2 = \left\|\psi\right\|^2 = \left\|\varphi\right\|^2 = \|\tilde{x}\|^2 .$$

Es folgt $\|z - \tilde{x}\|^2 = 0$, sprich $z = \tilde{x}$.

(c) Mit obiger Konstruktion erhalten wir eine eindeutige Fortsetzung auf die Vervollständigung von $\mathscr{H}$, die wir wieder auf $\mathscr{H}$ einschränken können.

Aufgabe G20 (Geometrische Charakterisierung von Elementen kleinsten Abstands)
Sei $M \subseteq \mathscr{H}$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines Hilbertraums $\mathscr{H}$ und sei $x \in \mathscr{H}$. Zeigen Sie, dass für $z \in M$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\|x - z\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|$,

(ii) $\Re\langle x - z, y - z\rangle \leq 0$ für alle $y \in M$.

Hinweis: Betrachten Sie $\|x - y_\lambda\|^2$, wobei $y_\lambda := (1-\lambda)z + \lambda y$ ist für $0 \leq \lambda \leq 1$ und $y \in M$.

Lösungshinweise: Aus (ii) folgt für $y \in M$:

$$\|x - y\|^2 = \|x - z + z - y\|^2 = \|x - z\|^2 + 2\,\Re\langle x - z, z - y\rangle + \|z - y\|^2 \geq \|x - z\|^2 .$$

Aus (i) erhalten wir mit $y_\lambda := (1-\lambda)z + \lambda y = z - \lambda(z - y) \in M$:

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 \leq \|x - y_\lambda\|^2 &= \langle x - z + \lambda(z - y), x - z + \lambda(z - y)\rangle \\ &= \|x - z\|^2 + 2\lambda\,\Re\langle x - z, z - y\rangle + \lambda^2\|z - y\|^2 . \end{aligned}$$

Also gilt für alle $0 < \lambda \leq 1$ und alle $y \in M$:

$$-2\,\Re\langle x - z, z - y\rangle \leq \lambda\|z - y\|^2 ,$$

woraus $\Re\langle x - z, y - z\rangle \leq 0$ folgt.

Aufgabe G21 (Beispiel für ein singuläres Maß)
Finden sie ein einfaches Beispiel zweier Wahrscheinlichkeitsmaße μ und ν, so dass es eine μ-Nullmenge N gibt mit $\nu(N) = 1$.

Lösungshinweise: Wir betrachten den Maßraum $([0,1], \Sigma, \lambda)$, wobei Σ die Borel-σ-Algebra auf $[0,1]$ und λ das Lebesguemaß ist, und definieren für $A \in \Sigma$:

$$\mu(A) := \int_A 2 \cdot \chi_{[0,\frac{1}{2}]}\,\mathrm{d}\lambda \qquad \text{und} \qquad \nu(A) := \int_A 2 \cdot \chi_{[\frac{1}{2},1]}\,\mathrm{d}\lambda .$$

Hausübung

Aufgabe H14 (Bedingte Erwartung) (1 Punkt)

Sei $\mathscr{H}$ der Hilbertraum $\mathscr{H} := L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit $\mu(\Omega) < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ paarweise disjunkte Mengen mit $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ und $\mu(A_i) \neq 0$, für alle $1 \leq i \leq n$. Die von $A_1, \dots, A_n$ erzeugte σ-Unteralgebra von Σ bezeichnen wir mit Σ_0.

(a) Zeigen Sie: Die Menge

$$V = \{f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu) \, : \, f \text{ ist messbar bezüglich } \Sigma_0\}.$$

ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathscr{H}$.

Hinweis: Wie sehen Elemente von V aus?

(b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion P von $\mathscr{H}$ auf V.

Hinweis: Welche Eigenschaft hat $f - Pf$?

Bemerkung: Handelt es sich bei μ um ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so bezeichnet man $P(f)$ als *bedingte Erwartung von f gegeben* Σ_0 und schreibt für $P(f)$ auch $\mathbb{E}(f|\Sigma_0)$.

Lösungshinweise:

(a) Eine Funktion $f \in \mathscr{H}$ ist genau dann messbar bzgl. Σ_0, wenn es $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $0 \leq i \leq n$, gibt, so dass $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i}$ ist. Der Menge V ist also ein endlich-dimensionaler Teilraum und damit abgeschlossen.

(b) Für $g \in \mathscr{H}$ ist $P(g) = \sum_{i=1}^n \mu_i \chi_{A_i}$ mit $\mu_i \in \mathbb{C}$. Die Koeffizienten μ_i bestimmen wir aus den Bedingungen $g - P(g) \perp \chi_{A_j}$ für $0 \leq j \leq n$:

$$0 = \langle g - P(g), \chi_{A_j} \rangle = \int_\Omega \left(g - \sum_{i=1}^n \mu_i \chi_{A_i} \right) \chi_{A_j} \, d\mu = \int_\Omega g \chi_{A_j} \, d\mu - \int_\Omega \mu_j \chi_{A_j} \, d\mu.$$

Also ist $\mu_i = \frac{1}{\mu(A_j)} \int_{A_j} g \, d\mu$.

Aufgabe H15 (Die große Projektionsaufgabe) (2 Punkte)

(a) Sei $\mathscr{H}$ der Hilbertraum $L^2([-1,1])$. Wir definieren die lineare Abbildung

$$U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}, \; (Uf)(t) = f(-t).$$

Sei $\mathscr{F}$ der abgeschlossene lineare Teilraum $\mathscr{F} := \{f \in \mathscr{H} : \, U(f) = f\}$.

Zeigen Sie, dass U unitär ist, bestimmen Sie den Raum $\mathscr{F}^\perp$ und drücken Sie die orthogonalen Projektionen $P_\mathscr{F}$ und $P_{\mathscr{F}^\perp}$ von $\mathscr{H}$ auf $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}^\perp$ mit Hilfe von U aus.

Hinweis: Untersuchen Sie $f - P_\mathscr{F} f$ und $U(f - P_\mathscr{F} f)$, sowie deren Summe.

(b) Sei $\mathscr{H}$ der Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ferner sei S_n die Gruppe der Permutationen von n Elementen. Für $\sigma \in S_n$ definieren wir den unitären Operator

$$(U_\sigma f)(t_1, \dots, t_n) = f(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}).$$

Ferner sei $\mathscr{F} := \{f \in \mathscr{H} : \, U_\sigma f = f \text{ für alle } \sigma \in S_n\}$. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $\mathscr{H}$ auf $\mathscr{F}$, indem Sie diese mit Hilfe der unitären Operatoren U_σ ausdrücken.

Bemerkung: In der Quantenmechanik heißt $\mathscr{F}$ auch der *symmetrische n-Teilchen-Raum* und ist ein direkter Summand des symmetrischen Fockraumes.

(c) Abstrakt sieht das ganze so aus: Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe und $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum. Sei $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ die Gruppe der unitären Operatoren auf $\mathscr{H}$ und

$$\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H}) : g \mapsto U_g$$

ein Gruppenhomomorphismus, dass heißt, es gilt $U_g \cdot U_h = \pi(g) \cdot \pi(h) = \pi(g \circ h) = U_{g \circ h}$ für $g, h \in G$ (man sagt auch, π sei eine *unitäre Darstellung* der Gruppe G). Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion P auf den Fixraum $\mathscr{F} := \{x \in \mathscr{H} : \ U_g x = x \text{ für alle } g \in G\}$ durch

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} U_g$$

gegeben ist.

(d) Sei $0 \neq x \in \mathscr{H}$ und $M(x)$ die abgeschlossene konvexe Hülle der Menge $\{U_g x : g \in G\}$. Zeigen Sie: $M(x)$ besitzt ein eindeutig bestimmtes Element v mit minimaler Norm und es gilt: $M(x) \cap \mathscr{F} = \{Px\} = \{v\}$.

Lösungshinweise:

(a) U ist *isometrisch*: Sei $f \in \mathscr{H}$, dann gilt:

$$\|Uf\|^2 = \int_{-1}^{1} \left|(Uf)(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \left|f(-t)\right|^2 \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t = \|f\|^2 .$$

U ist *surjektiv*: Sei $f \in \mathscr{H}$, dann ist $(U(Uf))(t) = (Uf)(-t) = f(t)$, $t \in [-1, 1]$, d.h. $U(Uf) = f \in \operatorname{ran} U$.

Sei $h \in \mathscr{F}^{\perp}$, dann gilt für alle $g \in \mathscr{F}$:

$$0 = \langle h, g \rangle = \langle h, Ug \rangle = \int_{-1}^{1} h(t)\overline{g(-t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} h(-t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \langle Uh, g \rangle .$$

Daraus folgt $\langle h + Uh, g \rangle = 0$ für $g \in \mathscr{F}$, d.h. $h + Uh \in \mathscr{F}^{\perp}$. Außerdem ist $h + Uh \in \mathscr{F}$, denn:

$$U(h + Uh) = Uh + U(Uh) = Uh + h.$$

Insgesamt erhalten wir damit $h + Uh \in \mathscr{F} \cap \mathscr{F}^{\perp} = \{0\}$, d.h. $Uh = -h$.
Sei $f \in \mathscr{H}$ mit $Uf = -f$. Dann gilt für $g \in \mathscr{F}$:

$$\langle f, g \rangle = \langle f, Ug \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(-t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(-t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \langle Uf, g \rangle = -\langle f, g \rangle .$$

Daraus folgt $\langle f, g \rangle = 0$ für $g \in \mathscr{F}$ bzw. $f \in \mathscr{F}^{\perp}$. Es gilt also:

$$\mathscr{F}^{\perp} = \left\{ f \in \mathscr{H} : \ Uf = -f \right\} .$$

Darüber hinaus folgt aus $h + Uh = 0$ für $h \in \mathscr{F}^{\perp}$, dass für alle $f \in \mathscr{H}$ gilt:

$$0 = (f - P_{\mathscr{F}} f) + U(f - P_{\mathscr{F}} f) = f + Uf - 2P_{\mathscr{F}} f .$$

Also erhalten wir schließlich $P_{\mathscr{F}} f = \frac{1}{2}(f + Uf)$ und $P_{\mathscr{F}^{\perp}} f = (\mathbb{1} - P_{\mathscr{F}})f = \frac{1}{2}(f - Uf)$.

(b) Sei $h \in \mathscr{F}^\perp$ und $\sigma \in S_n$, dann gilt für alle $g \in \mathscr{F}$ mit Fubini (oder mit U_σ unitär – vgl. (c)):

$$
\begin{aligned}
0 = \langle h, g\rangle = \langle h, U_{\sigma^{-1}} g\rangle &= \int_{-1}^{1} h(t_1, \dots, t_n)\, \overline{g(t_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, t_{\sigma^{-1}(n)})}\, \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n \\
&= \int_{-1}^{1} h(s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(n)})\, \overline{g(s_1, \dots, s_n)}\, \mathrm{d}s_{\sigma(1)} \cdots \mathrm{d}s_{\sigma(n)} = \langle U_\sigma h, g\rangle
\end{aligned}
$$

Auch hier folgt $\sum_{\sigma\in S_n} U_\sigma h \in \mathscr{F}^\perp$. Da $S_n \ni \sigma \mapsto \tilde{\sigma}\sigma \in S_n$ bijektiv ist, erhalten wir $U_{\tilde{\sigma}} \left(\sum_{\sigma\in S_n} U_\sigma h\right) = \sum_{\sigma\in S_n} U_{\tilde{\sigma}\sigma} h = \sum_{\sigma\in S_n} U_\sigma h \in \mathscr{F}$. Für alle $h \in \mathscr{F}^\perp$ gilt also:

$$
\sum_{\sigma\in S_n} U_\sigma h \, \in \mathscr{F} \cap \mathscr{F}^\perp = \{0\}\,.
$$

Für $f \in \mathscr{H}$ impliziert dies mit $\left|S_n\right| = n!$ analog zu oben:

$$
0 = \sum_{\sigma\in S_n} U_\sigma (f - P_{\mathscr{F}} f) = \sum_{\sigma\in S_n} U_\sigma f - n! \cdot P_{\mathscr{F}} f \qquad \text{und} \qquad P_{\mathscr{F}} f = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} U_\sigma f.
$$

(c) Sei $y \in \mathscr{F}^\perp$ und $g \in G$. Dann ist U_g unitär und für alle $x \in \mathscr{F}$ gilt:

$$
0 = \langle y, x\rangle = \langle U_g y, U_g x\rangle = \langle U_g y, x\rangle\,,
$$

sowie mit der Bijektivität von $G \ni g \mapsto g \circ h \in G$:

$$
U_g \left(\sum_{h\in G} U_h y\right) = \sum_{h\in G} U_g U_h y = \sum_{h\in G} U_{g\circ h} y = \sum_{h\in G} U_h y\,.
$$

Analog zu oben impliziert dies $\sum_{h\in G} U_h y \in \mathscr{F} \cap \mathscr{F}^\perp = \{0\}$ und für $x \in \mathscr{H}$ erhalten wir:

$$
0 = \sum_{h\in G} U_h (x - Px) = \sum_{h\in G} U_h x - |G| \cdot Px \qquad \text{und} \qquad Px = \frac{1}{|G|} \sum_{h\in G} U_h x\,.
$$

(d) Da $M(x)$ konvex und vollständig ist, existiert ein Element $v \in M(x)$ mit minimalem Abstand zur 0, d.h.

$$
d(0, M) = \|v - 0\| = \|v\|\,.
$$

Außerdem ist $Px = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} U_g x \in M(x) \cap \mathscr{F}$. Für $y \in M(x)$ gibt es $0 \le \lambda_g \le 1$ mit $\sum_{g\in G} \lambda_g = 1$, so dass $y = \sum_{g\in G} \lambda_g U_g x$ ist und es gilt:

$$
Py = \frac{1}{|G|} \sum_{h\in G} U_h y = \sum_{g\in G} \lambda_g \frac{1}{|G|} \sum_{h\in G} U_{h\circ g} x = \sum_{g\in G} \lambda_g Px = Px.
$$

Also ist $M(x) \cap \mathscr{F} = \{Px\}$ und da $\|Px\| = \|Pv\| \le \|v\|$ ist, muss $Px = v$ sein.