Funktionalanalysis
4. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
08./09. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G14 (Eine Ungleichung)
Sei $M_n(\mathbb{C})$ der Vektorraum der komplexen $n \times n$-Matrizen und $\operatorname{tr} : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ die Spur auf $M_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ gilt:

$$\left|\operatorname{tr}(B^*A)\right|^2 \leq \operatorname{tr}(A^*A)\ \operatorname{tr}(B^*B).$$

Hinweis: An welche Ungleichung aus der Vorlesung erinnert Sie das?

Lösungshinweise: Für $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^n$ und $B = \left(b_{i,j}\right)_{i,j=1}^n$ ist $B^* = \left(\overline{b_{j,i}}\right)_{i,j=1}^n$ und $\operatorname{tr}(B^*A) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\overline{b_{i,j}}$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(B^*(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)) &= \operatorname{tr}(\lambda_1 B^* A_1 + \lambda_2 B^* A_2) = \operatorname{tr}(\lambda_1 B^* A_1) + \operatorname{tr}(\lambda_2 B^* A_2)\\
&= \lambda_1 \operatorname{tr}(B^* A_1) + \lambda_2 \operatorname{tr}(B^* A_2),\\
\operatorname{tr}(A^*B) &= \sum_{i,j=1}^n b_{i,j}\overline{a_{i,j}} = \sum_{i,j=1}^n \overline{\overline{b_{i,j}}a_{i,j}} = \overline{\operatorname{tr}(B^*A)}.
\end{aligned}$$

Also ist $M_n(\mathbb{C})^2 \ni (A,B) \mapsto \operatorname{tr}(B^*A) \in \mathbb{C}$ sesquilinear. Diese Abbildung ist positiv, da gilt

$$\operatorname{tr}(A^*A) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}\overline{a_{i,j}} = \sum_{i,j=1}^n \left|a_{i,j}\right|^2 \geq 0.$$

Also ist sie ein Semi-Skalarprodukt und erfüllt die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\left|\operatorname{tr}(B^*A)\right|^2 \leq \operatorname{tr}(A^*A)\ \operatorname{tr}(B^*B).$$

Bemerkung: Da $\operatorname{tr}(A^*A) = 0$ ist genau dann, wenn $A = 0$ ist, ist diese Abbildung auch definit und damit ein Skalarprodukt, welches den endlich-dimensionalen Vektorraum $M_n(\mathbb{C})$ zu einem Hilbertraum macht.

Aufgabe G15 (Hilbertraumnorm)
Sei $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ ein Prä-Hilbertraum.

(a) Zeigen Sie: Für $x, y \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $x \neq y$ ist $\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\| < 1$.

(b) Interpretieren Sie die Aussage aus (a) geometrisch: Wie sieht die Einheitskugel von $(\mathscr{H}, \|\cdot\|)$ aus?

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{C}^n$ nicht von einem Skalarprodukt erzeugt werden.

Lösungshinweise:

(a) Es gilt:

$$\left\|\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y\right\|^2 = \tfrac{1}{4}\langle x+y, x+y\rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|x\|^2 + \left\|y\right\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(\|x\|^2 + \left\|y\right\|^2 + 2\,\Re\langle x, y\rangle\right) \overset{\text{C.S.}}{\leq} \tfrac{1}{4}\left(\|x\| + \left\|y\right\|\right)^2 = 1$$

mit Gleichheit, falls $x = \lambda y$, $|\lambda| = 1$. Da $\lambda \neq 1$ ist, erhalten wir:

$$\left\|\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y\right\| = \left\|\tfrac{\lambda}{2}y + \tfrac{1}{2}y\right\| = \left|\tfrac{1+\lambda}{2}\right| \left\|y\right\| < 1.$$

(b) Die Einheitskugel ist strikt konvex.

(c) Bei diesen Normen gibt es Extremalpunkte, deren Konvexkombinationen auf dem Rand der Einheitskugel liegen. Diese Einheitskugeln sind dementsprechend nicht strikt konvex.

Aufgabe G16 (Projektionen und stop-Konvergenz)
Sei $\mathscr{H} := L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $\chi_{[-n,n]}$ die charakteristische Funktion von $[-n, n]$ und

$$P_n : \mathscr{H} \to \mathscr{H} : \; f \mapsto \chi_{[-n,n]} \cdot f \; .$$

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathscr{K}_n := \{f \in \mathscr{H} : \; f(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus [-n, n] \text{ fast überall}\}$. Zeigen Sie, dass jedes $\mathscr{K}_n$ ein abgeschlossener Teilraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass P_n die orthogonale Projektion von $\mathscr{H}$ auf $\mathscr{K}_n$ ist für $n \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie, dass $\operatorname*{stop-lim}_{n\to\infty} P_n = \mathbb{1}$ gilt.

Lösungshinweise:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(g_k)_{g\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{K}_n$ mit $g := \lim_k g_k$. Dann existiert eine Teilfolge $(g_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ mit $g(x) = \lim_m g_{k_m}(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ f.ü. und für fast alle $x \in \mathbb{R} \setminus [-n, n]$ folgt:

$$g(x) = \lim_{m\to\infty} g_{k_m}(x) = \lim_{m\to\infty} 0 = 0.$$

Also ist $g \in \mathscr{K}_n$.

(b) Sei $g \in \mathscr{K}_n$ und $f \in \mathscr{H}$, dann gilt:

$$\left\|g - f\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|g - f\right|^2 \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} \left|f\right|^2 \,\mathrm{d}\lambda + \underbrace{\int_{-n}^{n} \left|g - f\right|^2 \,\mathrm{d}\lambda}_{\geq 0} .$$

Damit gilt für alle $f \in \mathscr{H}$:

$$\begin{aligned}\left\|P_n(f) - f\right\|_2^2 = \left\|\chi_{[-n,n]} \cdot f - f\right\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} \left|f\right|^2 \mathrm{d}\lambda \\ &\leq \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} \left|f\right|^2 \mathrm{d}\lambda + \inf_{g\in\mathscr{K}_n} \int_{-n}^{n} \left|g - f\right|^2 \mathrm{d}\lambda \\ &= \inf_{g\in\mathscr{K}_n} \left\|g - f\right\|_2^2 = d(f, \mathscr{K}_n)^2.\end{aligned}$$

Also ist $P_n(f) = \chi_{[-n,n]} \cdot f$ die eindeutig bestimmte Funktion mit $\left\|P_n(f) - f\right\|_2 = d(f, \mathscr{K}_n)$. [Alternativ kann man natürlich auch einfach zeigen, dass $P_n(f) - f \in \mathscr{K}_n^{\perp}$ ist.]

(c) Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $P_n(f) = f$ für alle $n \geq n_0$, d.h. $\lim_{n\to\infty} \left\|P_n(f) - f\right\|_2 = 0$. Da $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $\mathscr{H}$ liegt, folgt die Behauptung.

Aufgabe G17 (Keine Hilbertraumnorm)
Zeigen Sie: Für $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, ist $||\cdot||_p$ auf $\mathbb{C}^n$ keine Hilbertraum-Norm, d.h., keine Norm, die von einem Skalarprodukt kommt. (Warum reicht es, das für $n = 2$ zu überprüfen?)

Lösungshinweise: Hier ist für $p \neq 2$ die Parallelogramm-Ungleichung verletzt:
Sei $(e_i)_{i=0}^n$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^n$. Dann ist $\left\|e_1\right\|_p = \left\|e_2\right\|_p = 1$ und $\left\|e_1 + e_2\right\|_p = \left\|e_1 - e_2\right\|_p = 2^{1/p}$. Also gilt

$$\begin{aligned}\left\|e_1 + e_2\right\|_p^2 + \left\|e_1 - e_2\right\|_p^2 &= 2^{2/p} + 2^{2/p}, \\ 2\left(\left\|e_1\right\|_p^2 + \left\|e_2\right\|_p^2\right) &= 2(1+1) = 4.\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H11 (Große Einheitskugeln) (1 Punkt)

(a) Finden Sie in den Einheitskugeln von $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$, und von $(L^p([0,1]), ||\cdot||_p)$ konkrete Beispiele von Folgen, die keine konvergente Teilfolge enthalten.

(b) Auf $\ell^\infty(\mathbb{N})$ betrachten wir $||x||_Q := \limsup_n |x_n|$ für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

   (i) Zeigen Sie: $||\cdot||_Q$ ist eine Halbnorm auf $\ell^\infty(\mathbb{N})$ und es ist $||x||_Q = 0$ genau dann, wenn $x \in c_0(\mathbb{N})$.

   (ii) Zeigen Sie, dass $||x||_Q = ||[x]||_0$, wobei $||\cdot||_0$ die Quotientennorm auf $\ell^\infty(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$ bezeichnet.

(c) Bestimmen Sie eine überabzählbare Teilmenge M der abgeschlossenen Einheitskugel von $(\ell^\infty(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N}), ||\cdot||_0)$ mit der Eigenschaft, dass $||x - y||_0 = 1$ für $x, y \in M,\ x \neq y$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie Null-Eins-Folgen. Wann sind zwei Null-Eins-Folgen in derselben Äquivalenzklasse?

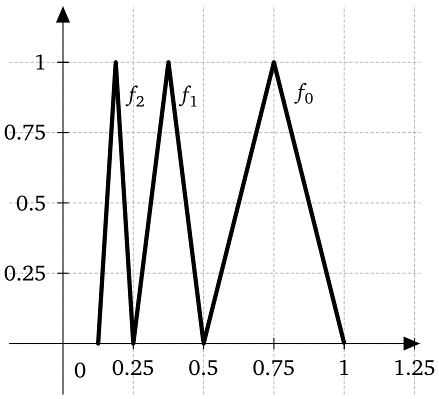
Lösungshinweise:

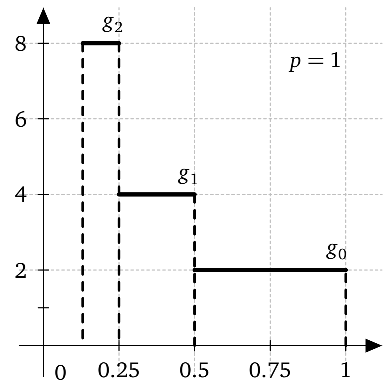
(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ seien $f_n \in \mathcal{C}([0,1])$ und $g_n \in L^p([0,1])$ definiert durch

$$f_n(t) := \begin{cases} 2^{(n+2)}t - 2, & \text{für } 2^{-(n+1)} \le t < 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+2)}, \\ -2^{(n+2)}t + 4, & \text{für } 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+2)} \le t < 2^{-n}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$g_n(t) := \begin{cases} 2^{(n+1)1/p}, & \text{für } 2^{-(n+1)} \le t < 2^{-n}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\|f_n\|_\infty = \|g_n\|_p = 1$ und $\|f_m - f_n\|_\infty = 1$ sowie $\|g_m - g_n\|_p = 2^{1/p}$ für alle $m \neq n \in \mathbb{N}$.





(b) [zu (ii)]: Sei $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, dann gilt für alle $h \in c_0(\mathbb{N})$:

$$\|x+h\|_\infty \ge \|x+h\|_Q = \|x\|_Q .$$

Also ist $\|[x]\|_0 \ge \|x\|_Q$. Für die umgekehrte Ungleichung sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n| \le \|x\|_Q + \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Sei $h_n := -x_n$ für alle $n \le N$ und $h_n := 0$ für $n > N$, dann ist $h := (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$ und

$$\|x+h\|_\infty \le \|x\|_Q + \varepsilon.$$

Also gilt auch $\|[x]\|_0 \le \|x\|_Q$.

(c) Zwei 0-1-Folgen sind in der selben Äquivalenzklasse, wenn sie sich nur an endlich vielen Stellen unterscheiden (0-1-Folgen in $c_0(\mathbb{N})$ sind finit). Also enthält eine Äquivalenzklasse höchstens abzählbar viele 0-1-Folgen. Da die Menge der 0-1-Folgen überabzählbar ist, muss es überabzählbar viele Äquivalenzklassen geben. Außerdem gilt für zwei 0-1-Folgen $x, y \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ mit $[x] \neq [y]$ offensichtlich $\|[x]\|_0 \le 1$ und $\|[x]-[y]\|_0 = 1$.

Aufgabe H12 (Skalarprodukt auf Quotienten) (1 Punkt)
Sei V ein Vektorraum mit Semi-Skalarprodukt $<\,,\,>$ und sei $N := \{x \in V : <x,x> = 0\}$.
Zeigen Sie: Auf dem Quotientenraum V/N ist $<[x],[y]> := <x,y>$ ein wohldefiniertes Skalarprodukt. (Formulieren Sie Ihre Lösung besonders sorgfältig!)

Lösungshinweise: Ist $h \in N$, dann gilt für alle $x \in V$ mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$|<x,h>|^2 = |<h,x>|^2 \le <h,h><x,x> = 0.$$

Seien $[x_1]=[x_2]$ und $[y_1]=[y_2]$ in V/N, dann gibt es $h_x,h_y\in N$, so dass $x_1=x_2+h_x$ und $y_1=y_2+h_y$ und es gilt:

$$\begin{aligned}<[x_1],[y_1]> &=<x_1,y_1>=<x_1,y_1>=<x_1,y_1>+<h_x,y_1>+<x_2,h_y>\\ &=<x_2,y_1>+<x_2,h_y>=<x_2,y_2>=<[x_2],[y_2]>\,.\end{aligned}$$

Die Abbildung ist also wohldefiniert. Seien $[x_0],[x_1],[y]\in V/N$ und $\lambda_0,\lambda_1\in\mathscr{K}$, dann gilt

$$\begin{aligned}<\lambda_0[x_0]+\lambda_1[x_1],[y]> &=<[\lambda_0x_0+\lambda_1x_1],[y]>=<\lambda_0x_0+\lambda_1x_1,y>\\ &=\lambda_0<x_0,y>+\lambda_1<x_1,y>\\ &=\lambda_0<[x_0],[y]>+\lambda_1<[x_1],[y]>,\\ <[x_0],[y]> &=<x_0,y>=\overline{<y,x_0>}=\overline{<[y],[x_0]>}.\end{aligned}$$

Die Abbildung ist also auch sesquilinear. Für $[x]\in V/N$ ist $<[x],[x]>=<x,x>\geq 0$ und aus $<[x],[x]>=<x,x>=0$ folgt, dass $x\in N$ ist und damit auch $[x]=[0]$. Es folgt, dass die Abbildung ein wohldefiniertes Skalarprodukt auf V/N ist.

Aufgabe H13 (Summen abgeschlossene Teilräume und Orthogonalität) (1 Punkt)
Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und M,N zwei abgeschlossene Teilräume von $\mathscr{H}$.

(a) Sei $M\perp N$, d.h. $\langle x,y\rangle=0$ für alle $x\in M$ und $y\in N$. Zeigen Sie, dass die Menge $M+N:=\{x+y\ :\ x\in M, y\in N\}$ abgeschlossen ist.

(b) Sei $M\perp N$ und $M+N=\mathscr{H}$. Beweisen Sie, dass $N=M^\perp$ ist.

(c) Sei $A\subseteq\mathscr{H}$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie, dass $A^\perp=\overline{\operatorname{span}(A)}^\perp$ ist, wobei $\operatorname{span}(A)$ den linearen Spann / die lineare Hülle von A bezeichnet.

Lösungshinweise:

(a) Sei $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq M+N$ mit $z:=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+y_n$. Die orthogonalen Projektionen auf M bzw. N bezeichnen wir mit P_M bzw. P_N. Dann gilt auf Grund der Stetigkeit von P_M und P_N:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}x_n &= \lim_{n\to\infty}P_M(x_n+y_n)=P_M(z)\in M,\\ \lim_{n\to\infty}y_n &= \lim_{n\to\infty}P_N(x_n+y_n)=P_N(z)\in N.\end{aligned}$$

Also ist $z=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\lim\limits_{n\to\infty}y_n=P_M(z)+P_N(z)\in M+N$.

(b) Aus $\langle x,y\rangle=0$ für alle $x\in M$, $y\in N$ folgt, dass $N\subseteq M^\perp$ ist.
Sei $z\in M^\perp\subseteq\mathscr{H}$. Dann existieren nach Voraussetzung $x\in M$ und $y\in N$ mit $z=x+y$ und es gilt:

$$\|x\|^2=\langle x,x\rangle=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle=\langle x,x+y\rangle=\langle x,z\rangle=0.$$

Also ist $z=y\in N$ und damit $M^\perp\subseteq N$.

(c) Aus $A\subseteq\overline{\operatorname{span}(A)}$ folgt $\overline{\operatorname{span}(A)}^\perp\subseteq A^\perp$.
Sei $x\in A^\perp$. Dann ist $\langle x,y\rangle=0$ für alle $y\in A$ und wegen der Bilinearität des Skalarprodukts ist auch $\langle x,y\rangle=0$ für alle $y\in\operatorname{span}(A)$. Da das Skalarprodukt stetig ist folgt wiederum, dass sogar $\langle x,y\rangle=0$ für alle $y\in\overline{\operatorname{span}(A)}$ gilt. Also ist $x\in\overline{\operatorname{span}(A)}^\perp$ und damit $A^\perp\subseteq\overline{\operatorname{span}(A)}^\perp$.