Funktionalanalysis
3. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
01./02. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G9 (Quotientenabbildung)
Seien E, F normierte Räume, $T : E \to F$ linear und $H \subseteq E$ ein abgeschlossener Teilraum, sodass $H \subseteq \ker T$. Dann kann man $\tilde{T} : E/H \to F$ kanonisch definieren und es ist $\|T\| = \left\|\tilde{T}\right\|$.

Lösungshinweise: Definiert man $\tilde{T}([x]) := T(x)$, dann ist $\tilde{T}$ wohldefiniert, da für $[x_1] = [x_2]$ ein $h \in H$ existiert, so dass $x_1 = x_2 + h$ ist und $\tilde{T}([x_1]) = T(x_1) = T(x_1 + h) = T(x_2) = \tilde{T}([x_2])$. Außerdem ist $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$, denn aus der Kontraktivität der Quotientenabbildung folgt, dass $\|T\| \leq \left\|\tilde{T}\right\|$ ist, und $\left\|\tilde{T}\right\| \leq \|T\|$ folgt aus

$$\left\|\tilde{T}([x])\right\| = \|T(x)\| = \|T(x+h)\| \leq \|T\| \, \|x+h\| \quad \forall\, h \in H.$$

Aufgabe G10 (Isomorphismen)
Zeigen Sie: Ist $T : E \to F$ linear und bijektiv, sodass $\|T\|_{\text{Op}} \leq 1$ und $\left\|T^{-1}\right\|_{\text{Op}} \leq 1$, dann ist T isometrisch, d.h. $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in E$.

Lösungshinweise: Es gilt:

$$\|x\| = \left\|T^{-1}(T(x))\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|T(x)\| \leq \|T(x)\| \leq \|T\| \, \|x\| \leq \|x\| \,.$$

Aufgabe G11 (Multiplikationsoperatoren)
Sei $E := \mathcal{C}([0,1])$, $g \in E$ und $M_g : \mathcal{C}([0,1]) \ni f \mapsto g \cdot f \in \mathcal{C}([0,1])$. Bestimmen Sie die Operatornorm $\left\|M_g\right\|_{\text{Op}}$ für den Fall, dass

(a) E mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen wird.

(b) E mit der L^1-Norm $\|\cdot\|_1$ versehen wird.

Was vermuten Sie für die anderen p-Normen?

Lösungshinweise: In beiden Fällen erhalten wir $\left\|M_g\right\|_{\text{Op}} = \left\|g\right\|_\infty$:

(a) Im ersten Fall erhalten wir mit $\|\mathbb{1}\|_\infty = 1$:

$$\begin{aligned} \left\|M_g f\right\|_\infty &= \left\|g \cdot f\right\|_\infty = \left\|g\right\|_\infty \cdot \left\|f\right\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \left\|M_g\right\|_{\text{Op}} \leq \left\|g\right\|_\infty, \\ \left\|M_g \mathbb{1}\right\|_\infty &= \left\|g\right\|_\infty = \left\|g\right\|_\infty \cdot \|\mathbb{1}\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \left\|M_g\right\|_{\text{Op}} \geq \left\|g\right\|_\infty. \end{aligned}$$

(b) Im zweiten Fall folgt $\left\|M_g\right\|_{\mathrm{Op}} \leq \left\|g\right\|_\infty$ aus:

$$\left\|M_g f\right\|_1 = \left\|g \cdot f\right\|_1 = \int_0^1 \left|g \cdot f\right| \mathrm{d}\lambda \leq \left\|g\right\|_\infty \cdot \int_0^1 \left|f\right| \mathrm{d}\lambda = \left\|g\right\|_\infty \cdot \left\|f\right\|_1 .$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $t_0 \in [0,1]$, so dass die stetige Funktion g dort ihr Betrags-Maximum annimmt, d.h. $\left|g(t_0)\right| = \left\|g\right\|_\infty$. Dann existieren ein Intervall $I_\varepsilon \subseteq [0,1]$ mit $t_0 \in I_\varepsilon$, so dass $\left|g(t)\right| > \left|g(t_0)\right| - \varepsilon$ für $t \in I_\varepsilon$, und eine stetige Funktion $f_\varepsilon \in E$, so dass $\left\|f_\varepsilon\right\|_1 = 1$ ist und $f_\varepsilon(t) = 0$ für $t \notin I_\varepsilon$. Nun gilt:

$$\left\|M_g f_\varepsilon\right\|_1 = \int_0^1 \left|g\right| \cdot \left|f_\varepsilon\right| \mathrm{d}\lambda = \int_{I_\varepsilon} \left|g\right| \cdot \left|f_\varepsilon\right| \mathrm{d}\lambda > \int_{I_\varepsilon} \left(\left|g(t_0)\right| - \varepsilon\right) \cdot \left|f_\varepsilon\right| \mathrm{d}\lambda = \left(\left|g(t_0)\right| - \varepsilon\right).$$

Also ist $\left\|M_g\right\|_{\mathrm{Op}} \geq \left(\left\|g\right\|_\infty - \varepsilon\right)$ für alle $\varepsilon > 0$.

Aufgabe G12 (Unendlich große Matrizen)
Gegeben sei $(a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{j,k} \in \mathbb{C}$ und $M := \sup\{|a_{j,k}| \ : \ j,k \in \mathbb{N}\} < \infty$.
Für $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ definiere $Ax := y$ mit $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $y_j =: \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} x_k$.

(a) Zeigen Sie, dass $A : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ eine stetige lineare Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie die Operatornorm von A.

Lösungshinweise:

(a) Linearität nachrechnen! Dass $\|A\|_{\mathrm{Op}} \leq M$ ist und damit die Stetigkeit von A, folgt aus:

$$\left|(Ax)_j\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{j,k}\right| \left|x_k\right| \leq M \cdot \|x\|_1 \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

(b) Sei $(a_{j_n,k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} \left|a_{j_n,k_n}\right| = M$. Definiere $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^1(\mathbb{N})$ durch

$$x_j^{(n)} := \begin{cases} 1, & \text{für } j = k_n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\lim_{n\to\infty} \left\|A x^{(n)}\right\|_\infty \geq \lim_{n\to\infty} \left|a_{j_n,k_n}\right| = M$. Also gilt auch $\|A\|_{\mathrm{Op}} \geq M$.

Aufgabe G13 (Integraloperatoren)
Sei $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Definiere eine Abbildung T als

$$(Tf)(x) := \int_a^b k(x,y) f(y) \,\mathrm{d}y \qquad \text{für } f \in (\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty).$$

(a) Zeigen Sie, dass $T : (\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ ein stetiger Operator ist.

(b) Bestimmen Sie eine obere Schranke für $\|T\|_{\mathrm{op}}$.

(c) Berechnen Sie $\|T\|_{\text{op}}$ für den Fall, dass $k(x,y) \neq 0$ für alle $x,y \in [a,b]$ ist.

(d) Erläutern Sie die Analogie zu Aufgabe G12.

Lösungshinweise:

(a) Es gilt

$$\left|(Tf)(x)\right| \leq \int_a^b \left|k(x,y)f(y)\right| \,\mathrm{d}y \leq \left\|f\right\|_\infty \cdot \int_a^b \left|k(x,y)\right| \,\mathrm{d}y.$$

Da $x \mapsto \int_a^b \left|k(x,y)\right| \,\mathrm{d}y$ stetig ist, existiert das Maximum auf $[a,b]$ und T ist beschränkt.

(b) Aus (a) folgt $\|T\|_{\text{Op}} \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} \int_a^b \left|k(x,y)\right| \,\mathrm{d}y$.

(c) Die Abbildung $x \mapsto \int_a^b \left|k(x,y)\right| \,\mathrm{d}y$ ist stetig und nimmt auf $[a,b]$ ihr Maximum in einem Punkt $x_0 \in [a,b]$ an. Wir definieren eine Funktion $f \in \mathcal{C}([a,b])$ durch $f(y) := \frac{|k(x_0,y)|}{k(x_0,y)}$. Dann ist $\left\|f\right\|_\infty = 1$ und es gilt:

$$Tf(x_0) = \int_a^b k(x_0,y)\frac{\left|k(x_0,y)\right|}{k(x_0,y)} \,\mathrm{d}y = \int_a^b \left|k(x_0,y)\right| \,\mathrm{d}y = \sup_{x\in[a,b]} \int_a^b \left|k(x,y)\right| \,\mathrm{d}y.$$

Also ist $\|T\|_{\text{Op}} \geq \sup\limits_{x\in[a,b]} \int_a^b \left|k(x,y)\right| \,\mathrm{d}y$.

(d) Dies ist so etwas wie eine "kontinuierliche Version" der Aufgabe G12 bzw. man kann $(k(x,y))_{x,y\in\mathbb{R}}$ als eine Art "kontinuierliche Matrix" lesen.

Hausübung

Aufgabe H8 (Grundraumtransformation) (1 Punkt)

Gegeben sei eine stetige Funktion $h : [0,1] \to [0,1]$. Wir definieren den Operator T_h auf $\mathcal{C}([0,1])$ durch:

$$T_h(u) := u \circ h.$$

(a) Zeigen Sie, dass $T_h : (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ eine beschränkte lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die Operatornorm von T_h.

(c) Zeigen Sie die beiden folgenden Aussagen:
   (i) h ist injektiv genau dann, wenn T_h surjektiv ist.
   (ii) h ist surjektiv genau dann, wenn T_h injektiv ist.

(d) Bestimmen Sie den Kern von T_h.

(e) Zeigen Sie: Bezüglich der punktweisen Multiplikation von Funktionen ist $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ eine Banachalgebra und T_h ist ein Algebra-Homomorphismus.
Setzen Sie dieses Ergebnis in Verbindung mit Ihrer Bestimmung von Kern T_h.

Bemerkung: Die Abbildung h wird auch als *Grundraumtransformation* bezeichnet.

Lösungshinweise:

(a) Rechne Linearität nach und ...

(b) ... verwende Aufgabe H7, um $\left\|T_h\right\|_{\mathrm{Op}} = \left\|T_h(\mathbb{1})\right\|_\infty = \|\mathbb{1}\|_\infty = 1$ zu erhalten.

(c) Sei h zunächst nicht injektiv. Dann existieren $x, y \in [0,1]$ mit $x \neq y$ und $h(x) = h(y)$. Es folgt $T_h(u)(x) = T_h(u)(y)$ für alle $u \in \mathcal{C}([0,1])$. Da nicht jedes $u \in \mathcal{C}([0,1])$ diese Eigenschaft besitzt, ist T_h nicht surjektiv.

Sei h nun injektiv. Dann ist h streng monoton und die Inverse h^{-1} auf $\operatorname{ran} h$ ist stetig. Für $u \in \mathcal{C}([0,1])$ können wir damit $u \circ h^{-1}$ zu einer stetigen Funktion $\tilde{u}$ auf $[0,1]$ fortsetzen und es gilt

$$T_h(\tilde{u}) = \tilde{u} \circ h = u \circ h^{-1} \circ h = u \qquad \forall u \in \mathcal{C}([0,1]).$$

Sei h zunächst nicht surjektiv. Dann ist $h_{\min} := \min_{x\in[0,1]} h(x) > 0$ oder $h_{\max} := \max_{x\in[0,1]} h(x) < 1$. Seien $u, v \in \mathcal{C}([0,1])$ mit $u(x) = v(x)$ für alle $x \in [h_{\min}, h_{\max}]$ und $u(x_0) \neq v(x_0)$ für ein $x_0 \notin [h_{\min}, h_{\max}]$. Dann ist $T_h(u) = u \circ h = v \circ h = T_h(v)$, aber $u \neq v$.

Sei h nun surjektiv. Dann gibt es für alle $y \in [0,1]$ ein $x \in [0,1]$ mit $y = h(x)$ und es folgt

$$u(y) = u \circ h(x) = T_h(u)(x) = T_h(v)(x) = v \circ h(x) = v(y),$$

falls T_h die Funktionen u und v auf dieselbe Funktion abbildet. Also impliziert $T_h(u) = T_h(v)$, dass $u = v$ ist.

(d) Mit der Notation aus (c) ist $u \in \ker T_h$ genau dann, wenn $u(x) = 0$ ist für alle $x \in [h_{\min}, h_{\max}]$. Für surjektives h ist also $\ker T_h = \{0\}$.

(e) $\ker T_h$ ist damit ein abgeschlossenes Ideal.

Aufgabe H9 (Wann ist die Einheitskugel kompakt?) (1 Punkt)

(a) Sei $(E, ||\cdot||)$ normierter Raum und $H \subset E$ ein echter abgeschlossener Teilraum. Zeigen Sie: Für $\varepsilon > 0$ existiert ein Element $x \in E$ mit $||x|| = 1$ und $||x - h|| > 1 - \varepsilon$ für alle $h \in H$.

Hinweis: Machen Sie sich zunächst die Aussage in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{C}^n$ mit der euklidischen Norm klar. Dann verstehen Sie die folgende Strategie:

Für ein Element $z \notin H$ finden Sie ein Element $h \in H$ sodass $||z - h||$ möglichst klein wird und betrachten Sie $x := \frac{z-h}{||z-h||}$.

(b) Zeigen Sie nun: Ist der normierte Raum $(E, ||\cdot||)$ nicht endlich-dimensional, so ist die Einheitskugel nicht kompakt.

Lösungshinweise:

(a) Da H abgeschlossen ist, wird durch $||[x]||_0 := \inf_{h\in H} ||x + h||$ für $[x] \in E/H$ eine Norm definiert. Für $z \notin H$ ist also $||[z]||_0 \gneqq 0$.
Sei $1 > \varepsilon > 0$, dann gibt es ein $h_\varepsilon \in H$, so dass $\left\|z - h_\varepsilon\right\| < \frac{1}{1-\varepsilon} ||[z]||_0$ ist. Setze $x := \frac{z-h_\varepsilon}{\left\|z-h_\varepsilon\right\|}$, dann ist $||x|| = 1$ und für $h \in H$ gilt:

$$||x - h|| = \left\| \frac{z-h_\varepsilon}{\left\|z-h_\varepsilon\right\|} - h \right\| = \frac{1}{\left\|z-h_\varepsilon\right\|} \left\| z - \left(h_\varepsilon + \left\|z - h_\varepsilon\right\| \cdot h\right) \right\| \geq \frac{1}{\left\|z-h_\varepsilon\right\|} ||[z]||_0 > 1 - \varepsilon.$$

(b) Sei E unendlich-dimensional, dann wählen rekursiv wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ wie folgt: Sei $x_1 \in E$ mit $\|x_1\| = 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $H_n := \overline{\operatorname{span}}\{x_1, \dots, x_n\}$. Dann wähle ein nach Teil (a) existierendes $x_{n+1} \in E$ mit $\|x_{n+1}\| = 1$, so dass $\|x_{n+1} - h_n\| > \frac{1}{2}$ ist für alle $h_n \in H_n$. Damit ist $\|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann keine konvergente Teilfolge enthalten.

Aufgabe H10 (Projektionen) (1 Punkt)

Sei $(E, \|\cdot\|)$ normierter Raum und $H \subset E$ ein endlich-dimensionaler Teilraum.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in E$ ein $h_x \in H$ existiert, so dass $\|x - h_x\| = \inf_{h\in H} \|x - h\|$ ist.

(b) Ist das Element $h_x \in H$ für $x \in E$ eindeutig bestimmt?

Lösungshinweise:

(a) Sei $x \in E$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in H, so dass $\lim_{n\in\mathbb{N}} \|x - h_n\| = \inf_{h\in H} \|x - h\| =: d$ ist. Also ist die Folge $(x - h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da $\|h_n\| = \|x - h_n + x\| \leq \|x - h_n\| + \|x\|$ ist, gilt das auch für $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da H endlich-dimensional ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(h_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert h_0 und es gilt:

$$\|x - h_0\| = \lim_{k\to\infty} \|x - h_{n_k} + h_{n_k} - h_0\| \leq \lim_{k\to\infty} \|x - h_{n_k}\| = \lim_{n\in\mathbb{N}} \|x - h_n\| = d.$$

(b) Wir betrachten $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ und $H := \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Dann sind die Elemente in H mit minimalem Abstand zu $x := \begin{pmatrix}-0.5\\0.5\end{pmatrix}$ gegeben durch die Menge $\left\{\begin{pmatrix}-0.5\\-0.5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \;:\; 0 \leq t \leq 1\right\}$.