Funktionalanalysis
2. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
25./26. Oktober 2012

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Zum Aufwärmen: Inneres, Abschluss und offene Mengen)

(a) Bestimmen Sie das Innere und den Abschluss der Menge

$$A := \{f \in \mathcal{C}([-1,1]) : f > 0\}$$

in $\big(\mathcal{C}([-1,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$.

(b) Bestimmen Sie das Innere und den Abschluss der Menge

$$B := \{f \in L^1([-1,1]) \;:\; f > 0 \text{ fast überall}\}$$

in $(L^1([-1,1]), \|\cdot\|_1)$.

(c) Ist die Menge der Polynomfunktion auf $[-1,1]$ eine offene Menge in $\big(\mathcal{C}([-1,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$?

Lösungshinweise:

(a) Es gilt $\mathring{A} = A$ und $\overline{A} = \{f \in \mathcal{C}([-1,1]) : f \geq 0\}$.

(b) Es gilt $\mathring{B} = \emptyset$ (für jede Funktion $f \in B$ und jedes $\varepsilon > 0$ kann man eine Funktion $\tilde{f}$ in der ε-Kugel um f definieren, die mit f übereinstimmt bis auf einem genügend schmalen Streifen, auf dem $\tilde{f}$ den Wert -42 annimmt)
und $\overline{B} = \{f \in L^1([-1,1]) \;:\; f \geq 0 \text{ fast überall}\}$.

(c) Sei f ein Polynom und $\varepsilon > 0$. Definieren wir $\tilde{f} \in \mathcal{C}([-1,1])$ durch $\tilde{f}(t) := f(t) + \frac{\varepsilon}{2}|t|$, dann gilt

$$\left\|f - \tilde{f}\right\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} \left|f(t) - f(t) - \tfrac{\varepsilon}{2}|t|\right| = \sup_{t\in[-1,1]} \left|\tfrac{\varepsilon}{2}|t|\right| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Damit ist $\tilde{f}$ in der ε-Kugel um f. Aber $\tilde{f}$ ist nicht differenzierbar in 0 und kann daher kein Polynom sein. Also ist die Menge der Polynomfunktion nicht offen.

Aufgabe G5 (Halbnorm und Quotient)

Sei E Vektorraum, $||\cdot||$ eine Halbnorm auf E und $H := \{x \in E : ||x|| = 0\}$. Sei die Halbnorm $||\cdot||_0$ auf dem Quotienten E/H definiert wie in der Vorlesung.
Zeigen Sie: $||\cdot||_0$ ist eine Norm auf E/H.

Lösungshinweise: Zur Definitheit: Sei $[x] \in E/H$ mit $||[x]||_0 = 0$. Dann gilt

$$0 = ||[x]||_0 = \inf_{y\in H} \left\|x + y\right\| \geq \inf_{y\in H} \left|\|x\| - \left\|y\right\|\right| = \inf_{y\in H} \|x\| = \|x\| \geq 0.$$

Also ist $x \in [0]$ bzw. $[x] = [0]$.

Aufgabe G6 (Ein Quotientenraum)
Sei $E := (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ und $H := \{f \in E : f(x) = 0 \text{ für } x \geq \frac{1}{3}\}$. Zeigen Sie, dass H abgeschlossen ist und identifizieren Sie E/H mit einem bekannten Banachraum.

Lösungshinweise: Für $f, g \in E$ gilt

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f(t) - g(t) = 0 \text{ für alle } t \in [1/3, 1] \quad \Leftrightarrow \quad f|_{[1/3,1]} = g|_{[1/3,1]}.$$

Damit sieht man leicht, dass man jede Äquivalenzklasse $[f] \in E/H$ mit der Einschränkung $f|_{[1/3,1]}$ eines Repräsentanten identifizieren kann. Also ist $E/H \cong \mathcal{C}([1/3, 1])$.

Aufgabe G7 (Banachraumwertige stetige Funktionen)
Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und K eine kompakte Menge, ferner sei $f : K \to E$ eine stetige Abbildung.
Zeigen Sie, dass $\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| : x \in K\}$ existiert, und dass somit durch $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf dem Raum $\mathcal{C}(K; E)$ der stetigen Funktionen mit Werten in E definiert wird (das hatten wir schon in der Vorlesung kurz angesprochen).

Zeigen Sie nun: Ist E ein Banachraum, dann ist auch $\mathcal{C}(K; E)$ ein Banachraum. (Sie können zur Vereinfachung auch $K = [0,1]$ annehmen.)

Lösungshinweise: Die Norm $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ ist stetig und $f : K \to E$ ist stetig nach Voraussetzung. Also ist auch die Funktion $K \ni x \mapsto \left\|f(x)\right\| \in \mathbb{R}$ stetig und nimmt auf der kompakten Menge K ihr Maximum an. Damit existiert das Supremum $\left\|f\right\|_\infty$.
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, dann ist für jedes $x \in K$ auch $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in E (warum?). Da E vollständig ist, existiert $f(x) := \lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.
Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert sogar bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gegen x: Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\left\|f_n - f_m\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n, m \geq N$ und für ein beliebiges $x \in K$ folgt aus der punktweisen Konvergenz, dass es ein $n_0 \geq N$ gibt mit $\left\|f_{n_0}(x) - f(x)\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Also gilt für alle $n \geq N$:

$$\left\|f_n(x) - f(x)\right\| \leq \underbrace{\left\|f_n(x) - f_{n_0}(x)\right\|}_{\leq \left\|f_n - f_{n_0}\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left\|f_{n_0}(x) - f(x)\right\|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Also folgt $\left\|f_n - f\right\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und – da gleichmäßige Grenzwerte stetiger Funktionen stetig sind ($\frac{\varepsilon}{3}$-Argument) – damit auch die Stetigkeit von f.

Aufgabe G8 (Vervollständigung)
Vervollständigen Sie den Beweis der Vollständigkeit der Vervollständigung eines normierten Raumes in 2.10 der Vorlesung.

Lösungshinweise: Wie $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$...

Hausübung

Aufgabe H4 (Geometrische Interpretation von Normen und konvexe Mengen) (1 Punkt)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und $K \subset V$ eine Teilmenge von V mit folgenden Eigenschaften:

(i) K ist konvex.
(ii) K ist absorbierend, d.h. $\forall x \in V \; \exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0 : \; x \in \alpha K := \{\alpha k \mid k \in K\}$.
(iii) K ist kreisförmig, d.h., $\forall x \in K \; \forall \beta \in \mathbb{K}$ mit $|\beta| = 1$ ist $\beta x \in K$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\|x\| := \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha \cdot K\}$ eine Halbnorm auf V definiert wird.

(b) Welche Eigenschaft einer Halbnorm ist nicht erfüllt, wenn man die Eigenschaft (i) (bzw. (ii), bzw. (iii)) nicht berücksichtigt?

(c) Wie muss K beschaffen sein, dass die in Aufgabenteil (a) definierte Halbnorm eine Norm ist? Geben Sie ein Beispiel an, bei dem K nur eine Halbnorm erzeugt.

(d) Sei $p : V \to [0,\infty)$ eine Abbildung, so dass
 (i) $p(x) = 0 \iff x = 0$,
 (ii) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ für alle $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
 Zeigen Sie, dass p genau dann eine Norm ist, wenn $K_p := \{x \in V \,:\, p(x) \le 1\}$ konvex ist.

Lösungshinweise:

(a) Nachrechnen!

(b) Ohne Eigenschaft (i) bzw. (ii) bzw. (iii) ist die Dreiecks-Ungleichung verletzt bzw. nimmt $\|\cdot\|$ nicht unbedingt endliche Werte an bzw. ist die Homogenität verletzt.

(c) Enthält K einen Teilraum von V, so ist $\|\cdot\|$ nicht definit.

(d) Sei p eine Norm. Dann gilt für $x, y \in K_p$ und $0 < \lambda < 1$:

$$p(\lambda x + (1-\lambda)y) \le p(\lambda x) + p((1-\lambda)y) = \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y) \le 1.$$

Sei K_p konvex. Für $x, y \in V \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& p(x) + p(y) \ge p(x+y) \\
\iff \quad 1 \ge \frac{p(x+y)}{p(x)+p(y)} &= p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)}\right) = p\left(\frac{x}{p(x)+p(y)} + \frac{y}{p(x)+p(y)}\right) \\
&= p\left(\frac{x}{p(x)+p(y)}\frac{p(x)}{p(x)} + \frac{y}{p(x)+p(y)}\frac{p(y)}{p(y)}\right) \\
\iff \quad 1 &\ge p\left(\frac{p(x)}{p(x)+p(y)}\frac{x}{p(x)} + \frac{p(y)}{p(x)+p(y)}\frac{y}{p(y)}\right)
\end{aligned}$$

Da $\frac{x}{p(x)}, \frac{y}{p(y)} \in K_p$ und $\frac{p(x)}{p(x)+p(y)} + \frac{p(y)}{p(x)+p(y)} = 1$ ist, sind diese Aussagen wahr. Also erfüllt p die Dreiecks-Ungleichung und ist damit eine Norm.

Aufgabe H5 (Extremalpunkte) (1 Punkt)

Ein Element x einer konvexen Menge K heißt *Extremalpunkt* von K, falls aus

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z$$

mit $y, z \in K$ und $\lambda \in (0,1)$ folgt, dass $y = x = z$ ist.

(a) Sei nun $K := \{x \in X \,:\, \|x\| \le 1\}$ die Einheitskugel eines normierten Raumes $(E, \|\cdot\|)$. Zeigen Sie: $\|x\| = 1$ für jeden Extremalpunkt x von K.

(b) Bestimmen Sie die Extremalpunkte der Einheitskugeln in $\mathbb{R}^2$ für die p-Normen, $1 \le p \le \infty$.

(c) Weisen Sie nach, dass in

$$E := \mathcal{C}([0,1]), \text{ mit } \|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

die Einheitskugel K keinen Extremalpunkt besitzt. Hierbei sei, wie üblich, $\mathcal{C}([0,1])$ der Raum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

Lösungshinweise:

(a) Ist $\|x\| \lneq 1$, so ist $x = \|x\| \frac{x}{\|x\|} + (1 - \|x\|)0$ eine Konvexzerlegung.

(b) Für $0 < p < 1$ sind alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x\|_p = 1$ extremal.
Für $p = 1$ erhält man die Punkte $(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)$ und für $p = \infty$ bilden $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$ die Extremalpunkte der Einheitskugel.

(c) Sei $f \in \mathcal{C}([0,1])$ mit $\left\|f\right\|_1 = 1$. Da f stetig ist, gibt es ein Intervall $[a,b] \subseteq [0,1]$ auf dem f entweder nur Werte größer als $1/2$ oder nur Werte kleiner als $-1/2$ annimmt. Setze

$$g(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{b-a}(x-a)\right), & \text{für } x \in [a,b], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann sind $\left\|f+g\right\|_1 \le 1$ und $\left\|f-g\right\|_1 \le 1$ und $f = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}(f-g)$.

Aufgabe H6 (Abgeschlossen + abgeschlossen ist nicht immer abgeschlossen) (1 Punkt)
Betrachten Sie die folgenden Teilräume von $\left(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1\right)$:

$$U := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}) : x_{2n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}, \quad V := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}) : x_{2n-1} = n x_{2n} \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) U und V sind abgeschlossene Teilräume von $\ell^1(\mathbb{N})$.

(b) $U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$ ist nicht abgeschlossen in $\ell^1(\mathbb{N})$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Raum der finiten Folgen $\Phi \subseteq U + V$ ist.

Lösungshinweise: Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^1(\mathbb{N})$ mit $x := \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$, dann gilt $\lim_{k\to\infty} x^{(k)}_n = x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq U$, dann folgt $\lim_{k\to\infty} x^{(k)}_{2n} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, d.h. $x \in U$. Für $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq V$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{2n} = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}_{2n} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n} x^{(k)}_{2n-1} = \frac{1}{n} \lim_{k\to\infty} x^{(k)}_{2n-1} = \frac{1}{n} x_{2n-1},$$

und damit ist $x \in V$. Die Teilräume U und V sind also abgeschlossen.
Sei $y \in \Phi$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $y_n = 0$ für alle $n \ge n_0$ und definiere $u, v \in \ell^1(\mathbb{N})$ durch

$$v_n := \begin{cases} y_n, & n \le n_0 \text{ gerade}, \\ \frac{1}{2}(n+1) y_{n+1}, & n \le n_0 \text{ ungerade}, \\ 0, & n > n_0, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad u_n := \begin{cases} y_n - v_n, & n \text{ ungerade}, \\ 0, & n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Dann ist $u_n + v_n = y_n$, $u_{2n} = 0$ und $v_{2n-1} = \frac{1}{2}(2n-1+1) y_{2n-1+1} = n y_{2n} = n v_{2n}$, d.h. $u + v = y$, $u \in U$ und $v \in V$. Da Φ bereits dicht in $\left(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1\right)$ ist, ist auch $U + V$ dicht in $\left(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1\right)$.

Aber $U + V \neq \ell^1(\mathbb{N})$ und damit nicht abgeschlossen: Sei $u \in U$ und $v \in V$, so dass $u + v = \tilde{x} \in \ell^1(\mathbb{N})$ mit $\tilde{x}_{2n} = \frac{1}{n^2}$ und $\tilde{x}_{2n-1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\frac{1}{n^2} = \tilde{x}_{2n} = u_{2n} + v_{2n} = v_{2n}$ und damit $v_{2n-1} = n v_{2n} = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu $v \in V \subseteq \ell^1(\mathbb{N})$.

Aufgabe H7 (Positive Abbildungen sind stetig) (1 Punkt)
Sei X eine kompakte Menge und $\left(\mathcal{C}(X;\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$ der Raum der stetigen Funktionen auf X mit Werten in $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm. Sei $T : \mathcal{C}(X;\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ eine *positive* lineare Abbildung, d.h. für eine positive (bzw. nicht-negative) Funktion $f \ge 0$ ist auch $T(f) \ge 0$ (hat nicht-negative Funktionswerte). Zeigen Sie, dass T stetig und dass $\|T\|_{\mathrm{OP}} = \|T(\mathbb{1})\|_\infty$ ist.

Lösungshinweise: Sei $f \in \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ mit $\left\|f\right\| \le 1$. Dann ist $-1 \le f(x) \le 1$ für alle $x \in X$ und $\mathbb{1} - f \ge 0$ und $\mathbb{1} + f \ge 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 \le T(\mathbb{1} - f) = T(\mathbb{1}) - T(f) \quad &\Rightarrow \quad T(f) \le T(\mathbb{1}), \\ 0 \le T(\mathbb{1} + f) = T(\mathbb{1}) + T(f) \quad &\Rightarrow \quad -T(\mathbb{1}) \le T(f). \end{aligned}$$

Also ist $\left\|T(f)\right\| \le \|T(\mathbb{1})\|$ für alle $f \in \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ mit $\left\|f\right\| \le 1$, woraus folgt, dass $\|T\| \le \|T(\mathbb{1})\|$ und dass T stetig ist. Da $\|\mathbb{1}\| = 1$ und $\|T(\mathbb{1})\| \le \|T\| \, \|\mathbb{1}\| = \|T\| = \|T(\mathbb{1})\|$ ist, haben wir auch die zweite Behauptung gezeigt.