Funktionalanalysis
1. Übungsblatt (mit Lösungshinweisen)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
18./19. Oktober 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Zur Motivation für die Funktionalanalysis)
Sei $A : \mathcal{C}^\infty([0,1]) \to \mathcal{C}^\infty([0,1]) : f \mapsto f'$ der Ableitungsoperator.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von A.

(b) Was ist $(e^{At} f)(x)$, wenn man e^{At} formal in eine Potenzreihe entwickelt? Welchen klassischen Satz aus der Analysis erkennen Sie? Warum ist das nicht befriedigend?

Lösungshinweise:

(a) Entspricht dem Lösen der gewöhnlichen DGL $Af = f' = \lambda f$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit der Lösung $f(t) = c\, e^{\lambda t}$, $c \in \mathbb{C}$.

(b) Formal gilt $e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$ und

$$e^{A(t-t_0)} f(t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n A^n f}{n!}(t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n,$$

was formal der Taylorentwicklung von f entspricht.

Aufgabe G2 (ℓ^p-Räume)
Für $1 \le p \le \infty$ sei $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ der normierte Vektorraum

$$\ell^p := \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \ \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \infty \right\} \quad \text{für} \quad 1 \le p < \infty\,,$$

bzw.

$$\ell^\infty := \{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \ \|x\|_\infty := \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\} < \infty \} \quad \text{für} \quad p = \infty\,.$$

(a) Zeigen Sie: Für $1 \le p < p' \le \infty$ ist ℓ^p eine echte Teilmenge von $\ell^{p'}$.

(b) Eine Folge heißt finit, wenn nur endlich viele Folgenglieder ungleich Null sind. Sei Φ der Vektorraum der finiten Folgen. Zeigen Sie, dass $\Phi \subset \ell^p$ für alle $p \ge 1$. Für welche $1 \le p \le \infty$ ist Φ dicht in $(\ell^p\,, \|\cdot\|_p)$?

Lösungshinweise:

(a) Sei $1 \leq p < p' < \infty$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$.
- Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und damit beschränkt und in ℓ^∞.
- Außerdem existiert ein Index $N \in \mathbb{N}$, so dass $\left|x_n\right| < 1$ ist für alle $n \geq N$. Insbesondere ist $\left|x_n\right|^p \geq \left|x_n\right|^{p'}$ für $n \geq N$ und damit

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left|x_n\right|^{p'} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \left|x_n\right|^p < \infty.$$

Das impliziert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^{p'}$.

Damit sind die Inklusionen gezeigt. Das die umgekehrten Inklusionen nicht erfüllt sind, sieht man an den Beispielen

$$\tilde{y} := (\tilde{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \text{ mit } \tilde{y}_n = 1 \quad \text{und} \quad y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^{p'} \text{ mit } y_n = \left(\tfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(b) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Phi$ ist offensichtlich beschränkt, d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. Außerdem gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n = 0$ ist für alle $n \geq N$, und damit ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|x_n\right|^p = \sum_{n=0}^{N} \left|x_n\right|^p < \infty, \qquad 1 \leq p < \infty.$$

Sei $1 \leq p < \infty$ und $y := (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$. Dann ist $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \Phi$ mit

$$x_n^{(k)} := \begin{cases} y_n, & \text{für } n \leq k \\ 0, & \text{für } n > k \end{cases}$$

eine Cauchy-Folge in ℓ^p, die gegen y konvergiert. Also ist Φ dicht in $(\ell^p\,,\|\cdot\|_p)$.

Das Φ nicht dicht in ℓ^∞ ist, sieht man am Beispiel der Folge $\tilde{y}$ aus Teil (a), denn für alle finiten Folgen $x \in \Phi$ ist $\left\|\tilde{y} - x\right\|_\infty \geq 1$.

Aufgabe G3 (Einige Normen auf $\mathbb{K}^n$)
Sei $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wir betrachten auf $\mathbb{K}^n$ die Funktionen

$$||z||_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^p\right)^{1/p}, \ 0 \leq p < \infty\,, \quad \text{und} \quad ||z||_\infty := \max\{|z_i| : i = 1, \ldots, n\}\,.$$

(a) Skizzieren Sie einige „Einheitskugeln“ $E_1^p := \{z \in \mathbb{R}^2 : ||z||_p \leq 1\}$ für einige charakteristische Werte von p (für welche Werte von p ist das besonders einfach?). Für welche Werte von p ist $||\cdot||_p$ sicher keine Norm?

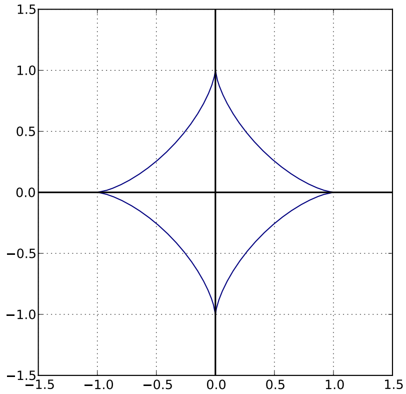
(b) Zeigen Sie: $\lim_{p\to\infty} ||z||_p = ||z||_\infty$ für alle $z \in \mathbb{C}^n$.

(c) Für $\alpha > 0$ sei $H_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ der von $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ erzeugte lineare Teilraum.

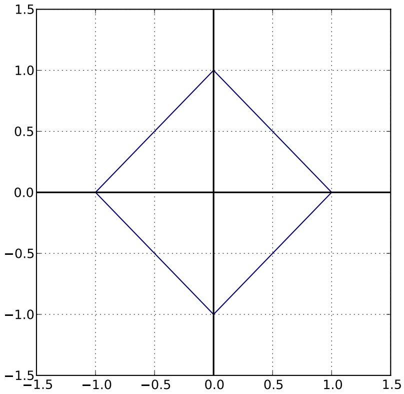
Betrachten Sie den Quotientenraum $\mathbb{R}^2/H_\alpha$ von $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_p)$ für $p = 1, 2, \infty$. Natürlich ist dieser Quotientenraum eindimensional. Mit welchem eindimensionalen Teilraum von $\mathbb{R}^2$ und welcher Norm auf diesem Teilraum würden Sie den Quotienten auf natürliche Weise identifizieren?

Lösungshinweise:

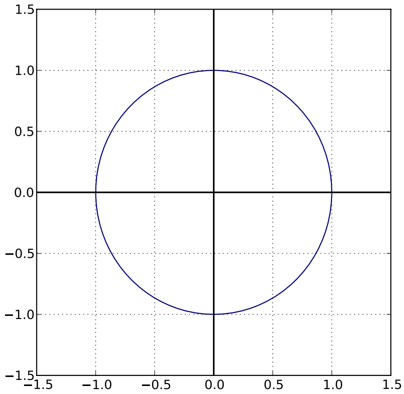
(a) Die folgenden Grafiken zeigen die Einheitskugeln für verschiedene Werte von $1 \le p \le \infty$.



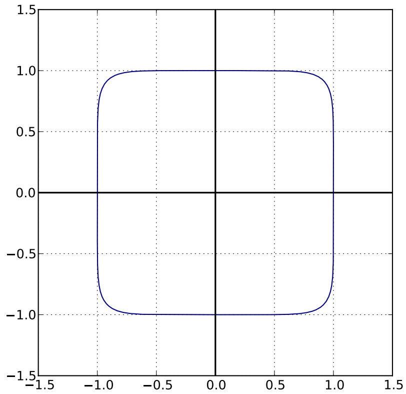
$p = 0.7$



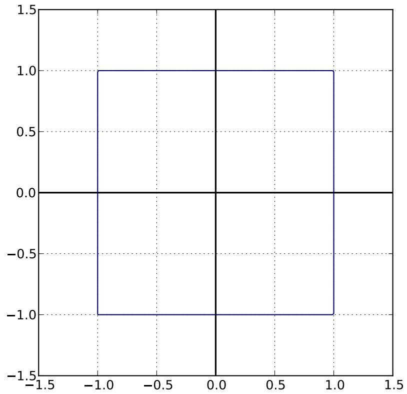
$p = 1$



$p = 2$



$p = 8$



$p = \infty$

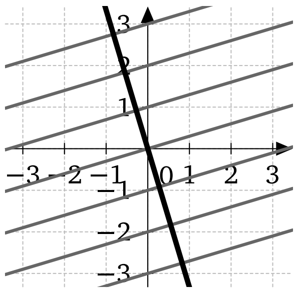
Für $0 < p < 1$ erhält man unter der Annahme, dass die Dreiecksungleichung erfüllt ist, den Widerspruch

$$1 \lneqq \left\| \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\| \le \left\| \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\| = 1.$$

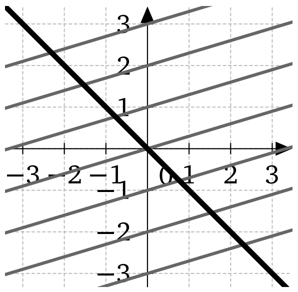
(b) Sei $z \in \mathbb{K}^n$ und $1 \le i \le n$, so dass $\left|z_i\right| = \|z\|_\infty$ ist. Dann gilt:

$$\|z\|_p \ge \left(\left|z_i\right|^p\right)^{1/p} = \left|z_i\right| = \|z\|_\infty\,,$$
$$\|z\|_p \le \left(n \cdot \left|z_i\right|^p\right)^{1/p} = n^{1/p} \cdot \|z\|_\infty \xrightarrow{p\to\infty} \|z\|_\infty\,.$$

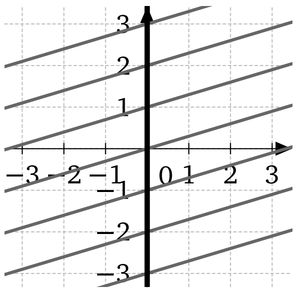
(c) In den folgenden Grafiken sind ein paar Äquivalenzklassen als graue Geraden eingezeichnet. Die Repräsentanten mit kleinster Norm bilden die dickere schwarze Gerade.



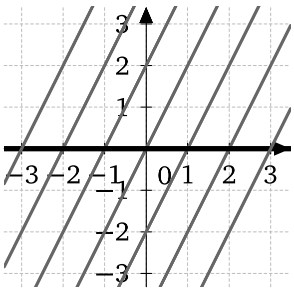
$\alpha = 0.3,\ p = 2$



$\alpha = 0.3,\ p = \infty$



$\alpha = 0.3,\ p = 1$



$\alpha = 2,\ p = 1$

Hausübung

Aufgabe H1 (Äquivalente Topologien) (1 Punkt)

Sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Eine Menge $A \subseteq E$ ist (nach Definition) genau dann offen, wenn für jeden Punkt $x \in A$ ein $r > 0$ existiert mit $K_r(x) \subseteq A$.

Zeigen Sie: Seien $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ zwei Normen auf E dann sind äquivalent:

(a) $(E, ||\cdot||_1)$ und $(E, ||\cdot||_2)$ haben dieselben offenen Mengen.

(b) Es gibt Konstanten $C > 0$ und $D > 0$ mit $C||x||_1 \le ||x||_2 \le D||x||_1$ für alle $x \in E$.

Lösungshinweise:

$(b) \Rightarrow (a)$ Jede offene Menge besteht aus inneren Punkten und für $x_0 \in E$ ist

$$\left\{x \in E \,:\, \left\|x - x_0\right\|_1 < \varepsilon\right\} \subseteq \left\{x \in E \,:\, \left\|x - x_0\right\|_2 < \varepsilon D\right\},$$
$$\left\{x \in E \,:\, \left\|x - x_0\right\|_2 < \varepsilon\right\} \subseteq \left\{x \in E \,:\, \left\|x - x_0\right\|_1 < \tfrac{\varepsilon}{C}\right\}.$$

Also ist eine Menge A offen in $(E, ||\cdot||_1)$ (d.h. für jeden Punkt liegt auch eine offene Kugel in A) auch offen in $(E, ||\cdot||_2)$ und umgekehrt.

$(a) \Rightarrow (b)$ Da die Menge $A := \left\{x \in E \,:\, ||x||_1 < 1\right\}$ offen in $(E, ||\cdot||_1)$ und damit nach Voraussetzung auch offen in $(E, ||\cdot||_2)$ ist, ist $0 \in A$ ein innerer Punkt. Es gibt also ein $r > 0$, so dass $\left\{x \in E \,:\, ||x||_2 < r\right\} \subseteq A$ ist. Für $x \in E$ setzen wir $\alpha := 2\,r^{-1}\,||x||_2$. Dann ist

$$\left\|\alpha^{-1}x\right\|_2 = \frac{||x||_2}{2\,r^{-1}\,||x||_2} < r \quad \text{und mit obiger Inklusion auch} \quad \frac{||x||_1}{2\,r^{-1}\,||x||_2} = \left\|\alpha^{-1}x\right\|_1 < 1.$$

Es folgt, dass $||x||_1 < 2\,r^{-1}\,||x||_2$ ist. Die zweite Ungleichung zeigt man analog.

Aufgabe H2 (Umgang mit Metriken) (1 Punkt)

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass der Raum (X, d_1) mit

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ebenfalls ein metrischer Raum ist.

(b) Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und d eine beliebige Metrik auf X. Weisen Sie nach, dass auf X keine Norm $||\cdot||$ mit der Eigenschaft $||x - y|| = d_1(x, y)$ für alle $x, y \in X$ existiert.

(c) Gegeben sei die Metrik $d_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $d_2(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Weiterhin sei auf $\mathbb{R}$ die Metrik $d_3(x, y) := |x - y|$ gegeben. Zeigen Sie, dass die identische Abbildung $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}, d_2) \to (\mathbb{R}, d_3)$ zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.
Hinweis: Ist jede Cauchy-Folge bezüglich d_2 auch automatisch eine Cauchy-Folge bzgl. d_3?

Lösungshinweise:

(a) Folgt aus den Eigenschaften von d und der Tatsache, dass die Funktion $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ monoton wächst.

(b) Hier ist die Homogenität verletzt: Es gilt $d_1(n\,x, 0) \le 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu $||n\,x - 0|| = n\,||x|| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ für $x \neq 0$.

(c) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die bzgl. d_2 gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und $y_n := \arctan x_n$ sowie $y := \arctan x$. Da $d_2(x_n) = \left|y_n - y\right|$ eine Nullfolge und die Funktion $y \mapsto \tan y$ stetig bzgl. d_3 ist, folgt:

$$d_3(\mathrm{Id}(x_n), \mathrm{Id}(x)) = d_3(x_n, x) = \left|x_n - x\right| = \left|\tan y_n - \tan y\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Also ist die identische Abbildung stetig. Um zu zeigen, dass diese Abbildung nicht gleichmäßig stetig ist, setzen wir $x_n := n$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bzgl. d_2 aber natürlich nicht bzgl. d_3. (Gleichmäßig stetige Funktionen bilden Cauchy-Folgen auf Cauchy-Folgen ab.)

N.B.: Also ist $\mathbb{R}$ bzgl. d_2 nicht vollständig, obwohl d_2 und d_3 die selbe Topologie erzeugen! Der Begriff der Vollständigkeit hängt also von der betrachteten Metrik ab und nicht allein von der von ihr erzeugten Topologie.

Aufgabe H3 (Summe von Banachräumen) (1 Punkt)

Gegeben seien zwei Banachräume $(E, \|\cdot\|_1)$ und $(F, \|\cdot\|_2)$.

Zeigen Sie: Für $1 \le p \le \infty$ ist $(E \oplus F, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum, wobei $\|x \oplus y\|_p := (\|x\|_1^p + \|y\|_2^p)^{1/p}$ für $1 \le p < \infty$ bzw. $\|x \oplus y\|_\infty := \max\{\|x\|_1, \|y\|_2\}$ ist.

Lösungshinweise: Sei $(x_n \oplus y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(E \oplus F, \|\cdot\|_p)$, d.h.

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \ge n_0 : \quad \varepsilon &> \left\|x_n \oplus y_n - x_m \oplus y_m\right\|_p = \left\|(x_n - x_m) \oplus (y_n - y_m)\right\|_p \\ &= \begin{cases} \left(\|x_n - x_m\|_1^p + \|y_n - y_m\|_2^p\right)^{1/p}, & \text{für } 1 \le p < \infty, \\ \max\{\|x_n - x_m\|_1, \|y_n - y_m\|_2\}, & \text{für } p = \infty. \end{cases}\end{aligned}$$

Also sind auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen und $x := \lim_n x_n$ sowie $y := \lim_n y_n$ existieren. Es folgt, dass $\lim_n x_n \oplus y_n = x \oplus y$ ist. Also konvergiert jede Cauchy-Folge und $(E \oplus F, \|\cdot\|_p)$ ist ein Banachraum.