Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 16. Dezember 2008

Algebra

10. Übung mit Lösungshinweisen

Aufgabe 47 Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $f \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Sei $\mathbb{L}$ ein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{K}$. Zeige folgende Behauptungen:

(a) Der Erweiterungsgrad $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ ist ein Teiler von $n!$.

(b) Gilt $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = n!$, so ist f irreduzibel.

(c) Zeige, daß die Umkehrung von (b) nicht gilt.

Hinweis: *Beim weiteren Bearbeiten des Übungsblatts wird sich Aufgabenteil (c) von alleine erledigen.*

LÖSUNG: (a) Wir zeigen die Aussage per Induktion. Ist $n = 1$, so ist nichts zu zeigen, da f bereits in $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt. Der Zerfällungskörper ist somit $\mathbb{K}$ selbst und wir erhalten $[\mathbb{K} : \mathbb{K}] = 1 = 1!$.
Sei die Aussage für n wahr und $\deg(f) = n + 1$. Wir betrachten zwei Fälle:
1. Fall: Ist f irreduzibel und ist $a \in \mathbb{L}$ eine Nullstelle von f, dann gilt

$$[\mathbb{K}(a) : \mathbb{K}] \leq \deg(f) = n + 1.$$

Weiter ist $\mathbb{L}$ der Zerfällungskörper von

$$g := \frac{f}{X - a}$$

über $\mathbb{K}(a)$ und es gilt $\deg(g) = n$. Somit folgt aus dem Gradsatz

$$[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = [\mathbb{L} : \mathbb{K}(a)] \cdot [\mathbb{K}(a) : \mathbb{K}].$$

Der erste Faktor teilt nach (IV) die Zahl $n!$ und der Zweite Faktor ist sogar gleich $n+1$, also teilt $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ die Zahl $n! \cdot (n+!) = (n + 1)!$.
2. Fall: Ist f nicht irreduzibel und $f = f_1 \cdot f_2$, mit $0 < \deg(f_1)$ und $0 < \deg(f_2)$, so folgt

$$[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = [\mathbb{L} : \mathbb{L}_1] \cdot [\mathbb{L}_1 : \mathbb{K}],$$

wobei $\mathbb{L}_1$ der Zerfällungskörper von f_1 sei. Somit ist $\mathbb{L}$ der Zerfällungskörper von $f_2 \in \mathbb{L}_1[X]$. Damit können wir zweimal die Induktionsvorraussetzung verwenden, da in der Formulierung die Wahl des Grundkörpers beliebig war und wir erhalten

$$[\mathbb{L} : \mathbb{L}_1] \text{ teilt } \deg(f_2)! \quad \text{und} \quad [\mathbb{L}_1 : \mathbb{L}] \text{ teilt } \deg(f_1)!.$$

Wenn wir zeigen können

$$\deg(f_1)! \cdot \deg(f_2)! \text{ teilt } (\deg(f_1) + \deg(f_2))! = (n + 1)!,$$

so sind wir fertig. Dies folgt aus der Tatsache, daß Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen sind:

$$\binom{\deg(f_1) + \deg(f_2)}{\deg(f_1)} = \frac{\deg(f)!}{\deg(f_1)! \cdot \deg(f_2)!} = \frac{(n+1)!}{\deg(f_1)! \cdot \deg(f_2)!}.$$

Somit stimmt die Zwischenbemerkung und auf Grund der Transitivität der Teilerrelation folgt die Aussage.

(b) Angenommen, f ist nicht irreduzibel. Dann zerfällt f in ein Produkt $g \cdot h$, wobei g und h mindestens Grad 1 haben. Wir wenden nun Aufgabenteil (a) an.

$$[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = [\mathbb{L} = \mathbb{K}(g)(h) : \mathbb{K}(g)] \cdot [\mathbb{K}(g) : \mathbb{K}],$$

wobei wir mit $\mathbb{K}(g)$ den Zerfällungskörper von g über $\mathbb{K}$ abgekürzt haben. Nach der vorigen Aufgabe erhalten wir nun die Abschätzung

$$[\mathbb{L} : \mathbb{K}] \leq \deg(h)! \cdot \deg(g)! < (\deg(h) + \deg(g))! = \deg(f)!.$$

Die strikte Ungleichung folgt aus folgendem Argument für natürliche Zahlen: Sind $a, b \in \mathbb{N} - \{0\}$, so gilt $a! \cdot b! < (a+b)!$, wie man sich leicht klar macht.

(c) Der Zerfällungskörper von $X^4 + 1$ hat Grad 4, wie aus Aufgabe 49 folgt.

Aufgabe 48 Bestimme einen Zerfällungskörper $\mathbb{L}$ des Polynoms $f(X) := X^4 + 2X^2 - 2$ über $\mathbb{Q}$ und bestimme den Erweiterungsgrad $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$.

LÖSUNG: Das Polynom $X^4 + 2X^2 - 2$ ist nach Eisenstein irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Das Polynom hat Grad 4, durch Substitution $d = X^2$ erhalten wir ein Polynom vom Grad 2:

$$d^2 + 2d - 2,$$

welches die Nullstellen

$$d_1 = -1 + \sqrt{3} \quad \text{und} \quad d_2 = -1 - \sqrt{3}$$

besitzt. Somit erhalten wir für f die Nullstellen

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{d_1} = \sqrt{-1 + \sqrt{3}} \\ x_2 &= -x_1 \\ x_3 &= \sqrt{1 + \sqrt{3}} \cdot i \\ x_4 &= -x_2. \end{aligned}$$

Die Erweiterung $\mathbb{Q}(x_1)$ hat somit Grad 4 über $\mathbb{Q}$. Wir bestimmen nun das Minimalpolynom von x_3 über diesem Körper. Es gilt

$$(\sqrt{-1 + \sqrt{3}})^2 + 2 = 1 + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(x_1).$$

Somit folgt

$$g(X) := X^2 + 1 + \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(x_1)[X].$$

Dieses Polynom hat die Nullstellen

$$\pm\sqrt{1 + \sqrt{3}} \cdot i.$$

Da

$$\sqrt{1 + \sqrt{3}} \cdot i \notin \mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q}(x_1)$$

gilt, ist somit das Polynom g irreduzibel in $\mathbb{Q}(x_1)[X]$, also das Minimalpolynom von x_3. Wir erhalten somit den Erweiterungsgrad

$$[\mathbb{L} : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(x_1)(x_3) : \mathbb{Q}(x_1)] \cdot [\mathbb{Q}(x_1) : \mathbb{Q}] = 4 \cdot 2 = 8.$$

Aufgabe 49 Bestimme einen Zerfällungskörper $\mathbb{L}$ der Familie

$$\left\{ f(X) := X^4 + 1, \quad g(X) := X^5 + 2 \right\}$$

über $\mathbb{Q}$ und den Erweiterungsgrad $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$.

LÖSUNG: Zuerst beschreiben wir die Nullstellen von X^4+1 in $\mathbb{C}$. Diese sind die Zahlen

$$\left\{\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot i\right\}.$$

Somit enthält der Zerfällungskörper von X^4+1 die Zahlen

$$\sqrt{2}=\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot i\right)+\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot i\right)$$

und

$$i=\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot i\right)+\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot i\right)}{\sqrt{2}}.$$

Somit folgt $\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)\subseteq\mathbb{Q}(f)$, wobei $\mathbb{Q}(f)$ der Zerfällungskörper von f bezeichne. Umgekehrt sehen wir sofort $\mathbb{Q}(f)\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)$.
Hier haben wir dann auch einen Fall, daß der Zerfällungskörper eines irreduziblen Polynoms nicht Erweiterungsgrad $\deg(f)!$ hat, ein Gegenbeispiel zu Aufgabe 47 (c).
Nun diskutieren wir die Nullstellen von X^5+2. Offensichtlich erhalten wir alle 5 komplexen Nullstellen dadurch, daß wir zu $\mathbb{Q}$ zum einen die Zahl $\sqrt[5]{2}$ und die erste 10te echt komplexe Einheitswurzel ξ hinzufügen. Somit folgt leicht

$$\mathbb{Q}(g)=\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2},\xi).$$

Die Nullstellen von g sind nämlich $\sqrt[5]{2}\cdot\xi^n$ mit $n\in\{1,3,5,7,9\}$.
Nun gilt es, die Erweiterung

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2},i,\xi)/\mathbb{Q}$$

zu verstehen. Mit Hilfe des Additionstheorems

$$\sin(5x)=16\sin^5(x)-20\sin^3(x)+5\sin(x)$$

ermitteln wir den Wert von $\sin(\frac{1}{5}\pi)$, indem wir $x=\frac{1}{5}\pi$ wählen, $\sin(\pi)=0$ auf der linken Seite nutzen und die polynomielle Gleichung in $\sin(x)$ auf der rechten Seite durch Ausklammern und Substitution $d=\sin^2(x)$ lösen. Wir erhalten dadurch

$$\xi=\cos(\frac{1}{5}\pi)+i\sin(\frac{1}{5}\pi)=\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}\cdot i,$$

$$\xi^3=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}\cdot i,$$

$$\xi^5=-1,\quad \xi^7=\overline{\xi^3},\quad \xi^9=\overline{\xi}.$$

Somit sehen wir sofort, daß $\xi\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)$ liegt, da X^2-5 irreduzibel in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$ ist, wie wir in der letzten Übung gesehen haben, somit auch in $\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)[X]$.
Weiter ist ξ Nullstelle des Polynoms $X^4-X^3+X^2-X+1$, dem über $\mathbb{Q}[X]$ irreduziblen Teiler von X^5+1. Somit ist $1<[\mathbb{Q}(f,\xi):\mathbb{Q}(f)]\leq 4$. Somit kommen nur noch die Erweiterungsgrade 2 und 4 in Frage.
Wir berechnen nun aussagekräftige Koeffizienten der Polynome

$$(X-\xi)(X-\xi^n)$$

für $n=3,7,9$ und schauen, welche davon in $\mathbb{Q}(\sqrt{2},i)[X]$ liegen können. Führt dies jedesmal auf Widersprüche, so ist $X^4-X^3+X^2-X+1$ irreduzibel über $\mathbb{Q}(f)$ und wir würden das Minimalpolynom von ξ in $\mathbb{Q}(f)[X]$ kennen.

$$(X-\xi)(X-\xi^9)=X^2+\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot X+1.$$

Der lineare Koeffizient kann nicht in $\mathbb{Q}(f)$ liegen, andernfalls läge $\sqrt{5}$ in $\mathbb{Q}(f)$, ein Widerspruch. Das Polynom $(X - \xi)(X - \xi^3)$ hat als Realteil des linearen Koeffizienten die Zahl

$$-\frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}...$$

den Rest brauchen wir nicht mehr zu kennen, da $1, \sqrt{2}$ linear unabhängig sind in $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$, also bräuchten wir $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$, was nicht stimmt.
Beim Polynom $(X - \xi)(X - \xi^7)$ ist die Argumentation genauso.
Somit hat $X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$ keine Zerlegung in $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ in Polynome vom Grad 2, also ist dieses Polynom in $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)[X]$ irreduzibel.
Die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q}(\xi, \sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}$$

hat somit Grad 16, eine zu 5 teilerfremde Zahl, welches der Erweiterungsgrad von

$$\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})/\mathbb{Q}$$

ist. Somit folgt final nach harter Arbeit

$$[L : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \sqrt{2}, i, \xi) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \sqrt{2}, i, \xi) : \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i, \xi)] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i, \xi) : \mathbb{Q}] = 5 \cdot 16 = 80.$$

Der Zerfällungskörper ist somit

$$\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \sqrt{2}, i, \xi)$$

und dieser hat Erweiterungsgrad 80 über $\mathbb{Q}$.

Hausübungen

Aufgabe H19 (Normale Erweiterungen I)

(a) Zeige, daß jede Körpererweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ mit $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2$ normal ist.

(b) Gibt es eine nicht normale Körpererweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ mit $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 3$?

Lösung: (a) Ist f ein irreduzibles Polynom vom Grad 2 über $\mathbb{K}$ und $\mathbb{L}$ ein Oberkörper von $\mathbb{K}$, in welchem f eine Nullstelle a habe, so folgt

$$f = (X - a) \cdot g \in \mathbb{L}[X].$$

Weiter hat g Grad 1, somit ist f über $\mathbb{L}$ in Linearfaktoren zerfallen, also ist $\mathbb{L}$ ein Zerfällungskörper von f.

(b) Betrachte die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$. Diese Erweiterung hat Grad 3, da $X^3 - 2$ nach Eisenstein in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist. Wäre nun die Erweiterung normal, so müßte, f als Minimalpolynom in Linearfaktoren zerfallen. In $\mathbb{C}$ besitzt $X^3 - 2$ die komplexen Nullstellen $\{\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2} \cdot \xi, \sqrt[3]{2} \cdot \xi^2\}$, wobei ξ eine echte komplexe dritte Einheitswurzel sei. Folglich ist $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{R}$ kein Zerfällungskörper von $X^3 - 2$, also die Erweiterung nicht normal.

Aufgabe H20 (Normale Erweiterungen II) Betrachte die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt{2}+2})/\mathbb{Q}$. Zeige oder widerlege, daß diese Erweiterung normal ist. Bestimme ggf. die kleinste normale Erweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt{2}+2}) \subseteq \mathbb{L}$ und deren Erweiterungsgrad.

Lösung: Zuerst bestimmen wir das Minimalpolynom von $a := \sqrt{\sqrt{2}+2}$. Dieses errechnen wir wie folgt

$$a^2 = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow (a^2 - 2)^2 = 2.$$

Daraus folgt, daß das Polynom

$$f(X) := X^4 - 4X^2 + 2$$

die Zahl a als Nullstelle besitzt. Weiter ist f irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ nach Eisenstein, somit ist f das Minimalpolynom von a. Wäre nun die Erweiterung normal, so müßte f in Linearfaktoren zerfallen. Wir ermitteln alle Nullstellen von f via Substitution $d := X^2$ und erhalten

$$d^2 - 4d + 2 = 0,$$

also die Nullstellen

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ x_2 &= -x_1 \\ x_3 &= \sqrt{2-\sqrt{2}} \\ x_4 &= -x_3 \end{aligned}$$

Wir sehen nun, daß $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(x_1)$ liegt, somit liegt folgendes Element ebenfalls in $\mathbb{Q}(x_1)$:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2}-1) \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} &= \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{(3-2\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{2})} \\ &= \sqrt{6-4-\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2-\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{L} := \mathbb{Q}(x_1)$ der Zerfällungskörper von f und $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 4$.
Anmerkung: Die Lösungsstrategie war hier nicht das kluge Raten von 2 geeigneten Kandidaten. Um auf die Zerlegung zu kommen, wurde eine geeignete $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(x_1)$ gewählt und anhand der daraus resultierenden Gleichungen das quadratische Problem

$$a^2 = 2 - \sqrt{2}$$

gelöst. Eine geeignete solche Basis ist

$$\left\{1, \quad \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}\right\}.$$