Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 28. Oktober 2008

Algebra

3. Übung mit Lösungshinweisen

Aufgabe 13 In dieser Aufgabe wollen wir folgende Aussage beweisen:
Sei R ein kommutativer Ring, I ein Ideal in R und $P_1, ..., P_n$ Primideale in R, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $I \subseteq P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_n$.

(2) $I \subseteq P_j$ *für ein* $1 \leq j \leq n$.

Bevor wir diese Aussage beweisen, bereiten wir erst einige Hilfsmittel vor.

(a) Beweise folgenden Hilfssatz: Ist R ein kommutativer Ring, $P \subseteq R$ ein Primideal und sind $a_1, ..., a_n$ Elemente aus R, dann folgt aus $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \in P$ bereits, daß für ein $1 \leq m \leq n$ das Element a_m schon in P liegt.

(b) Beweise die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) für den Fall $n = 2$.

Nimm nun an, die Behauptung sei für alle $n_0 < n$ wahr, (1) sei wahr und (2) sei falsch.

(c) Zeige, daß die Menge

$$I_j := I \cap P_j \cap \left(\bigcup_{i \neq j} P_i \right)^C$$

nicht leer ist.

(d) Finde nun ein Element in I, was nicht in $\bigcup_{i=1}^n P_i$ liegen kann. Beweise damit die Aussage.

Lösung: (a) Wir führen einen Induktionsbeweis. Für $n = 2$ ist die Aussage die Definition von Primidealen, somit ist nichts zu zeigen.
Sei die Aussage für $n - 1$ bewiesen, dann folgt aus

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \in P \Leftrightarrow (a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1}) \cdot a_n \in P,$$

also gilt $a_n \in P$ oder $(a_1 \cdot ... \cdot a_{n-1}) \in P$, also nach Induktionsvorraussetzung (IV) die Aussage.

(b) Angenommen, $I \subseteq P_1 \cup P_2$. Ist $P_1 = P_2$, so ist nichts zu zeigen, ebensowenig, wenn $I \subseteq P_1$ oder $I \subseteq P_2$ gilt. Nehmen wir an, dies sei falsch, dann existieren $a_1 \in (P_1 \cap I) - P_2$ und $a_2 \in (P_2 \cap I) - P_1$. Somit ist

$$a := a_1 + a_2$$

ein Element aus I, welches weder in P_1 noch in P_2 liegen kann, ein Widerspruch zur ersten Annahme. Also kann die zweite Annahme nicht zutreffen und es folgt die Behauptung.

(c) **Schritt 1:** Gilt $P_j \subseteq P_i$ für eine Wahl $0 \leq i \neq j \leq n$, so gilt $I \subseteq \bigcup_{i \neq j} P_i$, ein Widerspruch, denn dies ist äquivalent zu (2).
Schritt 2: Es gibt also ein Element in P_i, was nicht in P_j liegt und umgekehrt für ein $1 \leq i \neq j \leq n$. Wir betrachten nun

$$I_j := I \cap P_j \cap \left(\bigcup_{i \neq j} P_i \right)^C .$$

Besitzt das Komplement der Menge $\left(\bigcup_{i \neq j} P_i \right)$ mit P_j leeren Schnitt, so liegt I bereits in dieser Vereinigung, also folgt der Widerspruch, (2) ist wahr.
Besitzt das Komplement der Menge $\left(\bigcup_{i \neq j} P_i \right)$ mit $P_j \cap I$ leeren Schnitt, so liegt I ebenfalls bereits in $\bigcup_{i \neq j} P_i$, also folgt der Widerspruch, (2) ist wahr.
Also ist für alle $1 \leq j \leq n$ die Menge I_j nicht leer.

(d) Betrachte

$$a := a_1 + a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Dieses Element liegt in I, aber es kann nicht in $\cup_{i=1}^n P_i$ liegen:
Ist $a \in P_1$, so folgt $a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \in P_1$, also $a_k \in P_1$ für ein $1 < k \leq n$. Dies widerspricht aber der der Wahl von a_k.
Ist $a \in P_j$ für $1 < j \leq n$, so folgt auch $a_1 \in P_j$ im Widerspruch zur Wahl von a_1.
Damit ist also a ein Element aus I, welches in keinem der Primideale liegen kann, also auch nicht in deren Vereinigung. Damit folgt $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$.
Die Implikation $(2) \Rightarrow (1)$ ist offensichtlich, also ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 14 Sei R ein Ring und I ein Ideal in R. Zeige, daß es eine Bijektion zwischen der Menge

$$\mathcal{J} := \{J \subseteq R, \text{ J ist Ideal in } R, I \subseteq J\}$$

und der Menge aller Ideale in R/I via

$$J \to J/I$$

gibt. Somit ist jedes Ideal in R/I von der Form J/I.

Lösung: Wir wissen bereits, daß das Urbild des Quotientenhomomorphismus eines Ideals in R/I Ideal in R ist, welches den Kern von φ enthält. Umgekehrt wissen wir auch, daß das Bild eines Ideals J mit $I \subseteq J$ ein Ideal in R/I ist. Wir müssen also lediglich nachweisen, daß diese Entsprechung bijektiv ist.
Die Surjektivität ist aus Aufgabe 10 klar. Seien J_1, J_2 Ideale in R mit $I \subseteq J_1$ und $I \subseteq J_2$ und sei $q(J_1) = q(J_2)$. Dann sind die Nebenklassen

$$J_1 + I = J_2 + I.$$

Also existiert für jedes $j_1 \in J_1$ ein $i \in I$ und ein $j_2 \in J_2$ mit $j_1 = j_2 + i$. Da mit j_1 auch $j_1 - i$ in J_1 liegt, folgt somit $J_1 = J_2$.

Aufgabe 15 Zeige, daß für ein Ideal $(0) \neq I \subseteq \mathbb{Z}$ folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) Das Ideal I ist ein maximales Ideal.

(2) Das Ideal I ist ein Primideal.

(3) Das Ideal I ist das von einer Primzahl erzeugte Hauptideal.

LÖSUNG: Wir wissen, $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring.
$(1) \Rightarrow (2)$: Hier ist nichts zu beweisen, da maximale Ideale in kommutativen Ringen mit Eins automatisch Primideale sind.
$(2) \Rightarrow (3)$: Ist P ein Primideal, so gilt $P = (n)$ für eine natürliche Zahl $n \neq 1$. Ist weiter n keine Primzahl, so existiert eine Darstellung $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_m$, wobei die Zahlen p_i Primzahlen sind. Damit folgt aus der Primidealeigenschaft, daß bereits eine der Primzahlen p_j des Produktes in P liegen muß und weiter gilt $0 < |p_j| < |n|$. Damit kann aber n nicht der Erzeuger des Ideals gewesen sein, also existiert keine solche Produktdarstellung aus mehr als einem Element. Somit muß n prim gewesen sein.
$(3) \Rightarrow (1)$ Der Ring $\mathbb{Z}_p$ ist für jede Primzahl p ein Körper, also ist (p) ein maximales Ideal.

Aufgabe 16 Wir konstuieren ein Gegenbeispiel zu **H6**.
Betrachte $S = 2 \cdot \mathbb{Z}$, den Ring der geraden Zahlen, und den durch $R := S \times S$ definierten Produktring.

(a) Zeige, daß die Abbildung

$$\varphi : R \to \mathbb{Z}_4, \quad \varphi((x, y)) := x + y$$

ein Ringhomomorphismus ist. Bestimme weiter den Kern von φ.

(b) Zeige, daß $\ker(\varphi)$ nicht von der Form $I \times J$ für Ideale I, J in S sein kann.

LÖSUNG: (a) Linearität ist leicht, die Multiplikativität der Abbildung folgt aus

$$(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = x_1 \cdot x_2 + 0 + 0 + y_1 \cdot y_2.$$

Es gilt in obiger Rechnung sogar $x_1 \cdot x_2 = y_1 \cdot y_2 = 0$.
Das Element $(2, 0)$ liegt nicht im Kern von φ, die Elemente $(4, 0), (2, 2), (0, 4)$ schon. Der Kern von φ besteht aus allen Paaren, deren Summe durch 4 teilbar ist.

(b) Wäre der Kern von φ von der Form $I \times J$, so wäre $\pi_1(\ker(\varphi)) = I$ und $\pi_2(\ker(\varphi)) = J$. Da in diesen Mengen die Zahl 2 liegt, würde $I = J = S$ gelten, also wäre $R = \ker(\varphi)$. Dies ist ein Widerspruch, denn $\varphi(2, 0) \neq 0$.

Aufgabe 17 Es sei R ein Integritätsbereich und Hauptidealring. Zeige, daß folgende Aussagen für ein Ideal $I \subseteq R$, $I \neq (0)$, äquivalent sind:

(a) Das Ideal I ist ein Primideal.

(b) Das Ideal I ist ein maximales Ideal.

LÖSUNG: $(b) \Rightarrow (a)$: Ist I maximal, so ist I prim, denn R ist kommutativ und $1 \in R$.
$(a) \Rightarrow (b)$: Ist I prim und von der Form $I = (p)$ für ein $p \in R$, so folgt aus $(p) \subseteq J = (q)$:

$$p \in (q) \Rightarrow p = q \cdot x \text{ für ein } x \in R \Rightarrow q \cdot x \in (p).$$

Damit folgt $q \in (p)$ oder $x \in (p)$.
1. Fall: Ist $q \in (p)$, so gibt es eine Darstellung $q = p \cdot y$ und wir erhalten

$$p = q \cdot x = p \cdot x \cdot y \Leftrightarrow p \cdot (1 - x \cdot y) = 0.$$

Da R ein Integritätsbereich ist, folgt also $1 = x \cdot y$, somit ist x eine Einheit und $(p) = (q)$.
2. Fall: Ist $x \in (p)$, so folgt $x = p \cdot z$ und wir folgern

$$p = q \cdot x = p \cdot q \cdot z \Leftrightarrow (1 - q \cdot z) \cdot p = 0.$$

Somit ist, analog zu obiger Argumentation, q eine Einheit, somit gilt $(q) = R$.
Damit gibt es kein echtes Ideal, welches echt größer als (p) ist, somit ist (p) ein maximales Ideal.

Hausübungen

Aufgabe H5 (Unterringe und Quotienten der ganzen Zahlen)

(a) Bestimme für eine positive Zahl $m \in \mathbb{N}$ alle maximalen Ideale und alle Primideale des Rings $\mathbb{Z}_m$.

(b) Finde ein maximales Ideal I in $2 \cdot \mathbb{Z}$, dem Ring der geraden Zahlen, so daß $2 \cdot \mathbb{Z}/I$ kein Körper ist.

LÖSUNG: (a) Ist I ein Ideal in $\mathbb{Z}_m$, so ist $\mathbb{Z}_m/I$ ein kommutativer Ring mit Eins. Da $P \subseteq \mathbb{Z}_m$ genau dann ein Primideal ist, wenn der Quotient ein Integritätsbereich ist, ist P genau dann prim, wenn der Quotient ein Divisionsring, also ein Körper ist. Somit stimmen für $\mathbb{Z}_m$ Prim- und maximale Ideale überein.
Die Primideale in $\mathbb{Z}_m$ entsprechen aber Primidealen in $\mathbb{Z}$, welche (m) enthalten, also sind das genau die Bilder unterm Quotientenhomomorphismus der Ideale, die von den Primfaktoren von m erzeugt sind.

(b) Betrachte $4 \cdot \mathbb{Z}$ in $2 \cdot \mathbb{Z}$. Dies ist ein Ideal und der Quotient ist als abelsche Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}_2$, die Multiplikation ist aber von der Form

$$a \cdot b = 0, \qquad \text{Für alle } a, b \in 2 \cdot \mathbb{Z}.$$

Somit ist dieser Quotient kein Körper, obwohl das Ideal maximal war.

Aufgabe H6 (Ideale in Produkten) Es seien $R_1, ..., R_n$ Ringe mit Eins und I ein Ideal in $R := R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$. Zeige, daß es Ideale $I_1 \subseteq R_1, I_2 \subseteq R_2, ..., I_n \subseteq R_n$ gibt mit

$$I \cong I_1 \times I_2 \times ... \times I_n.$$

Warum ist das kein Widerspruch zu Aufgabe 16?

LÖSUNG: Setze $S := I$, dann ist S ein Ring. Setze weiter e_i das Element $(0, 0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ aus R, welches in der i-ten Komponente die Eins von R_i stehen hat und sonst nur Nulleinträge besitzt. Somit ist $S_i := e_i \cdot S$ ein Ideal in R also in S. Offenbar gilt

- $S = S_1 + S_2 + ... + S_n$,
- $S_i \cap S_j = (0)$ für $i \neq j$.

Somit erfüllen die Ideale $S_1, ..., S_n$ die Bedingung an das (interne) direkte Produkt, was heissen soll:

$$S = S_1 \times ... \times S_n.$$

Da jedes S_i ein Ideal von R_i ist, folgt die Behauptung.
Dies ist kein Widerspruch zu Aufgabe 16, da dort die Ringe keine Eins besitzen. Die Eins ist aber für unsere Konstruktion der Zerlegung essentiell.
