Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 21. Oktober 2008

Algebra

2. Übung mit Lösungshinweisen

Aufgabe 7 Es sei R ein Ring. Zeige, daß das Zentrum $Z(R)$ ein Unterring von R ist. Ist das Zentrum ein Ideal in R?

LÖSUNG: Es seien $x, y \in Z(R)$. dann folgt für ein beliebiges $r \in R$:

$$\begin{aligned} (x+y)r &= xr + yr = rx + ry \\ &= r(x+y), \\ (xy)r &= x(yr) = x(ry) = (xr)y = (rx)y \\ &= r(xy). \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung.
Es ist im allgemeinen $Z(R)$ kein Ideal in R, da es nichtkommutative Ringe mit Eins gibt. Die Eins ist immer im Zentrum, wäre dieses ein Ideal, wäre der Ring kommutativ.

Aufgabe 8 Seien R, S Ringe mit Eins und $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

(a) Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:
   (1) Es gilt $\varphi(1) = 1$.
   (2) Für jede Einheit $u \in R$ ist $\varphi(u)$ eine Einheit in S.
   (3) Es gibt eine Einheit $u \in R$, so daß $\varphi(u)$ eine Einheit in S ist.

(b) Erfüllt φ eine (und damit alle) Bedingungen aus (a), dann gilt $\varphi(u^{-1}) = \varphi(u)^{-1}$ für jede Einheit $u \in R$.

(c) Ist φ ein surjektiver Ringhomomorphismus, so gilt $\varphi(1) = 1$.

(d) Finde ein Beispiel von Ringen R, S mit Eins mit Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$, so daß $\varphi(1) \neq 1$.

(e*) Was kannst Du allgemein über das Element $\varphi(1)$ aussagen? (Hier solltest Du nicht länger als 5 Minuten Zeit investieren...)

(f) Finde ein Beispiel von Ringen R, S mit Eins mit Ringhomomorphismus, welcher ein nicht invertierbares Element auf eine Einheit abbildet.

LÖSUNG: (a) Wir zeigen drei Implikationen:
(1) $\Rightarrow$ (2) Ist $\varphi(1) = 1$ und $u \in R$ eine Einheit, so folgt

$$1 = \varphi(1) = \varphi(uu^{-1}) = \varphi(u)\varphi(u^{-1}).$$

Daraus folgt leicht die Behauptung.
(2) $\Rightarrow$ (3) Hier ist nichts zu zeigen.
(3) $\Rightarrow$ (1) Sei $u \in R$ ein Element, daß die Vorraussetzungen erfüllt. Dann erhalten wir

$$1 = \varphi(u)\varphi(u)^{-1} = \varphi(u)\varphi(u^{-1})\varphi(u)\varphi(u)^{-1} = \varphi(u)\varphi(u^{-1}) = \varphi(1).$$

(b) Folgt aus dem dritten Schritt in (a).

(c) Sei $e \in S$ mit $\varphi(1) = e$. Dann gilt für $x \in S$ und $\tilde{x} \in R$ mit $\varphi(\tilde{x}) = x$:

$$e \cdot x = \varphi(1 \cdot \tilde{x}) = x = \varphi(\tilde{x} \cdot 1) = x \cdot e.$$

Da die Eins eines Ringes eindeutig ist, folgt die Behauptung.

(d) Betrachte den Ring $R = M_2(\mathbb{C})$ und $S = M_4(\mathbb{C})$ und den Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist leicht nachzurechnen, daß φ ein Ringhomomorphismus ist, welcher die gewünschten Eigenschaften hat.

(e*) Das Element e ist idempotent, also $e^2 = e$ und es wirkt links- und rechtsneutral auf $\varphi(R)$.

(f) Betrachte die Teilmenge $R \subseteq M_2(\mathbb{C})$, welche aus allen oberen Dreiecksmatrizen besteht. Dies ist ein Ring. Betrachte $S = \mathbb{C}$ und den Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) := a.$$

Es ist leicht nachzurechnen, daß φ die gewünschten Eigenschaften hat.

Aufgabe 9 Es sei R ein Ring und $a \in R$, dann ist

(a) die Menge $I := \{x \in R : xa = 0\}$ ein Linksideal und

(b) die Menge $J := \{x \in R : ax = 0\}$ ein Rechtsideal.

LÖSUNG: Wir zeigen nur Aussage (a), Aussage (b) beweist man analog.
Sei $x, y \in I$, dann gilt:

$$(x - y)a = xa - ya = 0 - 0 = 0.$$

Weiter gilt für $r \in R$ beliebig:

$$(rx)a = r(xa) = r0 = 0.$$

Damit folgt die Behauptung.

Aufgabe 10 Seien R und S Ringe und $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Weiter sei I ein Ideal in R, J ein Ideal in S und $K := \ker(\varphi)$.

(a) Zeige, daß $\varphi^{-1}(J) \subseteq R$ ein Unterring von R ist, welcher K enthält. Ist $\varphi^{-1}(J)$ ein Ideal in R?

(b) Zeige, daß $\varphi(I) \subseteq S$ kein Ideal zu sein braucht. Ist $\varphi(I)$ ein Ideal in S, wenn φ injektiv ist? Ist $\varphi(I)$ ein Ideal in S, wenn φ surjektiv ist?

(c) Ist $K \subseteq I$, φ surjektiv und I ein Primideal in R, dann ist $\varphi(I)$ ein Primideal in S.

LÖSUNG: (a) Sind $x, y \in \varphi^{-1}(J)$, so ist auch $x - y \in \varphi^{-1}(J)$, denn

$$\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) \in J.$$

Ist $r \in R$ beliebig und $x \in \varphi^{-1}(J)$, so folgt

$$\varphi(r \cdot x) \in J,$$

also

$$r \cdot x \in \varphi^{-1}(J).$$

Die Eigenschaft $K \subseteq \varphi^{-1}(J)$ ist klar, da $0 \in J$ ist. Somit ist $\varphi^{-1}(J)$ ein Ideal in R.

(b) Wähle $I = R = \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Q}$ und $\varphi(n) := n$. Offensichtlich ist $\varphi(I)$ kein Ideal in $\mathbb{Q}$. Somit genügt Injektivität nicht, um sicherzustellen, daß Ideale in Ideale abgebildet werden.
Ist $\varphi : R \to S$ surjektiv, dann ist $\varphi(I)$ ein Ideal in S: Ist $r \in S, s \in \varphi(I)$ beliebig, $a \in R$ und $b \in I$ mit $\varphi(a) = r$ und $\varphi(b) = s$, so folgt

$$r \cdot s = \varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab) \in \varphi(I).$$

Jetzt folgt leicht, daß $\varphi(I)$ ein Ideal in S ist.

(c) Es genügt zu zeigen, daß im Faktorring R/K das Bild von I unter dem Quotientenhomomorphismus q ein Primideal ist, da wir die Zerlegung haben

$$R \xrightarrow{\quad q \quad} R/K \xrightarrow{\quad \tilde{\varphi} \quad} S,$$

wobei $\tilde{\varphi}$ ein Isomorphismus nach dem Homomorphiesatz ist und weiter gilt $\varphi = \tilde{\varphi} \circ q$. Wir setzen $P = q(I)$ und zeigen, P ist ein Primideal.
Dieser Beweis ist natürlich nur für kommutative Ringe wahr:
Sei $x, y \in R/K$ mit $x \cdot y \in P$, dann existieren Elemente $a, b \in R$ mit $r = q(a)$ und $s = q(b)$. Somit gilt für $k, k_a, k_b \in K$ geeignet:

$$\begin{aligned} x \cdot y \in P \quad &\Leftrightarrow \quad a \cdot b + k \in I \\ &\Leftrightarrow \quad a \cdot b \in I \\ &\Leftrightarrow \quad a \in I \text{ oder } b \in I \\ &\Leftrightarrow \quad a + k_a \in I \text{ oder } b + k_b \in I \\ &\Leftrightarrow \quad q(a) \in P \text{ oder } q(b) \in P \\ &\Leftrightarrow \quad x \in P \text{ oder } y \in P. \end{aligned}$$

Also ist P ein Primideal. Damit ist auch $\varphi(I)$ ein Primideal in S.
Für den allgemeinen Fall:
Seien $A, B \subseteq S$ Ideale mit $A \cdot B \subseteq P$. Dann existieren Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ mit $\varphi(\mathfrak{a}) = A$ und $\varphi(\mathfrak{b}) = B$. Da $\varphi(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = A \cdot B$ gilt, folgt nun leicht die Aussage.

Aufgabe 11 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, R ein Divisionsring und $n > 1$ eine natürliche Zahl.

(a) Zeige, daß das Zentrum von $M_2(\mathbb{K})$ genau aus den Vielfachen der Einheitsmatrix besteht.

(b) Zeige, daß Zentrum von $M_n(\mathbb{K})$ besteht ebenfalls nur aus skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix.

(c) Was kannst Du über das Zentrum von $M_n(R)$ sagen?

(d) Zeige, daß $M_n(R)$ keine echten Ideale besitzt.

(e) Folgere, daß $P := (0)$ ein Primideal in $M_n(R)$ ist.

(f) Zeige, daß nicht gilt

$$a \cdot b \in P \Rightarrow a \in P \text{ oder } b \in P.$$

(g) Gibt es echte Links- oder Rechtsideale in $M_n(R)$?

Lösung: (a) Offensichtlich ist die Menge $Z := \{\lambda \cdot \mathbb{1}_2 : \lambda \in \mathbb{K}\}$ ein Ring und ein Unterring des Zentrums. Umgekehrt, ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ im Zentrum, so vertauscht sie mit den Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen wir alle 4 Produkte, so erhalten wir $a = d$ und $b = c = 0$. Somit ist $Z = Z(M_2(\mathbb{K}))$.

(b) Hier müssen wir alle Matrixeinheiten betrachten, also Matrizen $E_{i,j}$, die in der i-ten Zeile und j-ten Spalte eine 1 stehen haben, und sonst nur 0-Einträge. Der Rest funktioniert wie in (a). Analog kann man wohl Induktion machen und mit Permutationsmatrizen arbeiten.

(c) Funktioniert wie in (b).

(d) Liegt ein nichttriviales Element in einem Ideal $I \subseteq M_n(R)$, so kann man schrittweise die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n$ erzeugen. Wir demonstrieren dies für den Fall $n = 2$ und eine Matrixeinheit. Wir nutzen dabei aus, daß für jedes $x \in M_n(R)$ und $E_{i,j} \in I$ auch $x \cdot E_{i,j} \in I$ und $E_{i,j} \cdot x \in I$ gilt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_n.$$

Ist $A \in M_2(R)$ ein beliebiges Element, so folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit etwas Spielerei kann man nun in einem nichttrivialen Element in A durch geeignetes Multiplizieren von Links und Rechts einen Eintrag rauspicken und den Rest auf Null setzen und durch geeignetes Multiplizieren mit einer Matrixeinheit diesen Eintrag auf eine Position seiner Wahl drehen. Durch Aufaddieren geeigneter Matrizen entsteht die Einheitsmatrix, da jedes Element in $R - \{0\}$ invertierbar ist.

(e) Es gibt in $M_n(R)$ nur zwei Ideale, das Ideal (0) und das Ideal $M_2(R)$. Somit folgt aus $I \cdot J \subseteq (0)$, daß entweder $I \neq M_2(R)$ oder $J \neq M_2(R)$ gilt, und damit die Behauptung.

(f) Da es in $M_2(R)$ reichlich Nullteiler gibt, sehen wir, daß die kommutative Charakterisierung von Primidealen für nichtkommutative Ringe einen echt stärkeren Begriff liefert.

(g) Die gibt es, Linksideale sind z. B. alle Matrizen, in welchen als erste Spalte die Nullspalte steht, und Rechtsideale sind z.B. Matrizen mit Nullzeile in der ersten Zeile.

Aufgabe 12 (Ringe stetiger Funktionen) Für eine kompakte Teilmenge[1] der reellen Zahlen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(\Omega)$ die stetigen Funktionen auf Ω mit Werten in $\mathbb{C}$. Es seien Ω_1 und Ω_2 zwei Kompakta in $\mathbb{R}$ und es sei $R := \mathcal{C}(\Omega_1)$ und $S := \mathcal{C}(\Omega_2)$. Weiter sei $\varphi : \Omega_2 \to \Omega_1$ eine stetige Abbildung.

(a) Was sind die Einheiten von R?

(b) Zeige, daß R und S bzgl. komponentenweiser Addition und Multiplikation kommutative Ringe mit Eins sind, und daß über die Vorschrift

$$R \ni f \to f \circ \varphi \in S$$

ein einserhaltender Ringhomomorphismus $\varphi_* : R \to S$ definiert ist. Beachte hierbei die umgekehrte Reihenfolge der beteiligten Objekte.

(c) Zeige, daß die Identität $\mathrm{id} : \Omega_1 \to \Omega_1$ die Identität auf R induziert.

(d) Zeige, daß der Ringhomomorphismus φ_* injektiv ist, wenn φ surjektiv ist.

(e) Charakterisiere die Ideale von R, welche als Kerne von Homomorphismen obiger Form auftreten.

(f) Welche unter den Idealen aus (d) sind Primideale von R?

---

[1]Alle Aussagen bleiben wahr, wenn man beliebige kompakte Hausdorffräume betrachtet.

Die folgenden Teilaufgaben sind nicht für eine Algebra Prüfung prüfungsrelevant.
Falls Du Dich für Funktionalanalysis interessierst, könntest Du folgende Verträglichkeiten von Topologie und Algebra interessant finden:

(g*) Zeige, daß R mit der Supremumsnorm einen Banachraum bildet und daß die Multiplikation in beiden Variablen gleichzeitig stetig ist. Solche Objekte heißen *Banachalgebren.*

(h*) Zeige, daß die Abbildung $R \ni f \to f^* \in R$, wobei $f^*(x) := \overline{f}(x)$, eine stetige Involution auf R ist. Somit ist R nicht nur eine Banachalgebra, sondern sogar eine *Banach***-Algebra.*

(i*) Zeige, daß die C*-Eigenschaft gilt, also $\|f\|_\infty^2 = \|f^*f\|_\infty$ für alle $f \in R$ erfüllt ist. Eine Banach*-Algebra, welche diese Eigenschaft erfüllt, heißt *C***-Algebra.*

(j*) Zeige, daß der Kern von φ sogar ein abgeschlossenes Ideal bildet, welches unter der Involution invariant ist.

(k**) Es gibt in den stetigen beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}$ Ideale, die nicht aus Funktionen bestehen, die an einer Stelle eine Nullstelle haben müssen. Hier spüren wir, daß die Kompaktheit als Vorraussetzung starke Auswirkungen hat.

LÖSUNG: (a) Die Funktion $f \in R$ ist genau dann invertierbar, wenn für jedes $x \in \Omega_1$ die komplexe Zahl $f(x) \in \mathbb{C}$ invertierbar ist. Da stetige reellwertige Funktionen auf Kompakta Ihr Maximum und Minimum annehmen, sind genau die Funktionen Einheiten, für die es Konstanten $m, M \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $x \in \Omega_1$ gilt

$$0 < m \leq |f(x)| \leq M.$$

Die Eins des Ringes ist die konstante Einsfunktion, wie man leicht nachrechnet.

(b) Sind $f, g \in R$ stetig, so ist auch $f - g$ und $f \cdot g$ stetig. Somit bildet R einen Ring. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_*(f+g)(x) &= (f+g)(\varphi(x)) = f(\varphi(x)) + g(\varphi(x)) \\
&= \varphi_*(f)(x) + \varphi_*(g)(x), \\
\varphi_*(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(\varphi(x)) \\
&= f(\varphi(x)) \cdot g(\varphi(x)) \\
&= \varphi_*(f)(x) \cdot \varphi_*(g)(x).
\end{aligned}$$

Also ist φ_* ein Ringhomomorphismus.

(c) Leicht.

(d) Sei φ surjektiv, dann gilt $\varphi_*(f) = \varphi_*(g)$ genau dann, wenn für alle $x \in \Omega_2$ gilt

$$f(\varphi(x)) = g(\varphi(x)).$$

Da φ surjektiv war, gilt somit für alle $y \in \Omega_1$:

$$f(y) = g(y).$$

Damit folgt $f = g$, also ist φ_* injektiv.
Die Umkehrungen unseres Resultates gelten auch.

(e) Ist φ nicht surjektiv, so betrachte die kompakte Teilmenge $\varphi(\Omega_2) =: K \subseteq \Omega_1$. Stetige Funktionen auf Ω_1, welche auf allen Punkten von K verschwinden, liegen somit im Kern von φ_*.

(f) Primideale sind genau die Ideale $I_x := \{f \in R : f(x) = 0\}$. Verschwinden alle Funktionen im Ideal auf mehr als einem Punkt, ist es leicht, zwei Funktionen zu konstruieren, für welche das Produkt im Ideal liegt, aber keine der beteiligten Funktionen.

Für den Rest der Aufgabe könnt Ihr gerne in meine Sprechstunde kommen. Einiges davon wird auch in der aktuell gelesenen Funktionalanalysis Vorlesung vorkommen.

Aufgabe 13 In dieser Aufgabe wollen wir folgende Aussage beweisen:
Sei R ein kommutativer Ring, I ein Ideal in R und $P_1, ..., P_n$ Primideale in R, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $I \subseteq P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_n$.

(2) $I \subseteq P_j$ für ein $1 \leq j \leq n$.

Bevor wir diese Aussage beweisen, bereiten wir erst einige Hilfsmittel vor.

(a) Beweise folgenden Hilfssatz: Ist R ein kommutativer Ring, $P \subseteq R$ ein Primideal und sind $a_1, ..., a_n$ Elemente aus R, dann folgt aus $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \in P$ bereits, daß für ein $1 \leq m \leq n$ das Element a_m schon in P liegt.

(b) Beweise die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) für den Fall $n = 2$.

Nimm nun an, die Behauptung sei für alle $n_0 < n$ wahr, (1) sei wahr und (2) sei falsch.

(c) Zeige, daß die Menge

$$I_j := I \cap P_j \cap \left(\bigcup_{i \neq j} P_i \right)^C$$

nicht leer ist.

(d) Finde nun ein Element in I, was nicht in $\bigcup_{i=1}^n P_i$ liegen kann. Beweise damit die Aussage.

Lösung: (a) Wir führen einen Induktionsbeweis. Für $n = 2$ ist die Aussage die Definition von Primidealen, somit ist nichts zu zeigen.
Sei die Aussage für $n - 1$ bewiesen, dann folgt aus

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \in P \Leftrightarrow (a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1}) \cdot a_n \in P,$$

also gilt $a_n \in P$ oder $(a_1 \cdot ... \cdot a_{n-1}) \in P$, also nach Induktionsvorraussetzung (IV) die Aussage.

(b) Angenommen, $I \subseteq P_1 \cup P_2$. Ist $P_1 = P_2$, so ist nichts zu zeigen, ebensowenig, wenn $I \subseteq P_1$ oder $I \subseteq P_2$ gilt. Nehmen wir an, dies sei falsch, dann existieren $a_1 \in (P_1 \cap I) - P_2$ und $a_2 \in (P_2 \cap I) - P_1$. Somit ist

$$a := a_1 + a_2$$

ein Element aus I, welches weder in P_1 noch in P_2 liegen kann, ein Widerspruch zur ersten Annahme. Also kann die zweite Annahme nicht zutreffen und es folgt die Behauptung.

(c) **Schritt 1:** Gilt $P_j \subseteq P_i$ für eine Wahl $0 \leq i \neq j \leq n$, so gilt $I \subseteq \bigcup_{i \neq j} P_i$, ein Widerspruch, denn dies ist äquivalent zu (2).
Schritt 2: Es gibt also ein Element in P_i, was nicht in P_j liegt und umgekehrt für ein $1 \leq i \neq j \leq n$. Wir betrachten nun

$$I_j := I \cap P_j \cap \left(\bigcup_{i \neq j} P_i \right)^C .$$

Besitzt das Komplement der Menge $\left(\bigcup_{i\neq j} P_i\right)$ mit P_j leeren Schnitt, so liegt I bereits in dieser Vereinigung, also folgt der Widerspruch, (2) ist wahr.
Besitzt das Komplement der Menge $\left(\bigcup_{i\neq j} P_i\right)$ mit $P_j \cap I$ leeren Schnitt, so liegt I ebenfalls bereits in $\bigcup_{i\neq j} P_i$, also folgt der Widerspruch, (2) ist wahr.
Also ist für alle $1 \leq j \leq n$ die Menge I_j nicht leer.

(d) Betrachte
$$a := a_1 + a_2 \cdot ... \cdot a_n.$$
Dieses Element liegt in I, aber es kann nicht in $\cup_{i=1}^n P_i$ liegen:
Ist $a \in P_1$, so folgt $a_2 \cdot ... \cdot a_n \in P_1$, also $a_k \in P_1$ für ein $1 < k \leq n$. Dies widerspricht aber der der Wahl von a_k.
Ist $a \in P_j$ für $1 < j \leq n$, so folgt auch $a_1 \in P_j$ im Widerspruch zur Wahl von a_1.
Damit ist also a ein Element aus I, welches in keinem der Primideale liegen kann, also auch nicht in deren Vereinigung. Damit folgt $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$.
Die Implikation (2) $\Rightarrow$ (1) ist offensichtlich, also ist die Behauptung bewiesen.

Hausübungen

Aufgabe H3 (Beispiele für Ideale) Es sei R ein kommutativer Ring und $J \subseteq R$ ein Ideal in R.

(a) Zeige, daß die Menge $N := \{x \in R : x \text{ ist nilpotent in } R\}$ ein Unterring von R ist. Ist N auch ein Ideal in R?

(b) Zeige, daß die Menge

$$\mathrm{Rad}J := \{x \in R : \text{ Es gibt eine natürliche Zahl } n \in \mathbb{N} - \{0\}, \text{ mit } x^n \in J\}$$

ein Ideal in R bildet. Dieses heißt das *Radikal von J*.

LÖSUNG: (a) Wir wissen bereits aus Aufgabe 4, daß die Summe nilpotenter Elemente wieder nilpotent ist. Weiter ist mit $a \in R$ auch $-a$ nilpotent, denn

$$(-a)^n = (-1)^n \cdot a^n = 0.$$

Somit bilden die nilpotenten Elemente aus R eine abelsche Gruppe. Das Produkt nilpotenter Elemente ist ebenfalls wieder nilpotent, da der Ring kommutativ ist:

$$(ab)^{\max\{m,n\}} = a^{\max\{m,n\}} \cdot b^{\max\{m,n\}}.$$

Somit bilden die nilpotenten Elemente einen Unterring von R. Analog erhalten wir, daß die nilpotenten Elemente ein Ideal bilden.

(b) Wir gehen analog vor, wie in Aufgabe 7.
Sei $a, b \in \mathrm{Rad}J$ mit $a^m \in J$ und $b^n \in J$. OBdA $m = n$. Dann gilt

$$(a-b)^{2n} = a^{2n} + \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{2n-k} \cdot a^k b^{2n-k} + b^{2n}.$$

Da in jedem auftretenden Summand ein Faktor ein Element von J ist, liegt auch $(a-b)^{2n}$ in J, also ist $(a-b) \in \mathrm{Rad}J$. Für ein $a \in \mathrm{Rad}J$ mit $a^n \in J$ und ein $r \in R$ folgt

$$(ra)^n = r^n \cdot a^n \in J.$$

Damit ist offensichtlich $\mathrm{Rad}J$ ein Ideal in R.

Aufgabe H4 (Beispiele für Hauptidealringe)

(a) Zeige, daß $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist.
Hinweis: *Es kann nützlich sein, Division mit Rest anzuwenden.*

(b) Zeige: Das Bild eines Hauptidealrings unter einem Ringhomomorphismus ist wieder ein Hauptidealring

(c) Folgere: Für jede natürliche Zahl m mit $m > 1$ ist der Quotientenring $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/(m \cdot \mathbb{Z})$ ein Hauptidealring.

LÖSUNG: (a) Sei I ein nicht triviales Ideal in $\mathbb{Z}$. Wir setzen $d(n) := |n|$. Es gibt in $I - \{0\}$ genau zwei Elemente kleinsten Betrags, wir nennen das positive Element der beiden n. Somit ist $(n) \subseteq I$. Wir wollen auch zeigen, daß $I \subseteq (n)$ gilt.
Sei $x \in I$ mit $0 < d(n) < d(x)$. Dann ist entweder x ein Vielfaches von n, also $x = y \cdot n$, oder wir können mit Division mit Rest eine Darstellung finden

$$x = y \cdot n + q,$$

wobei $0 < d(q) < d(n)$. Damit wäre aber auch $q \in I$, was der Annahme widerspricht, $d(n)$ ist minimal. Somit kann es diesen Fall nicht geben, also ist jedes Element des Ideals ein Vielfaches von n, also gilt $I \subseteq (n)$.

(b) Sei R ein Hauptidealring, $\tilde{S}$ ein Ring, $\varphi : R \to \tilde{S}$ ein Ringhomomorphismus und $S := \mathrm{im}(\varphi)$ das Bild von φ. Sei weiter I ein Ideal in S. Wir wissen, $J := \varphi^{-1}(I)$ ist ein Ideal in R, also existiert ein $r \in R$ mit $J = (r)$. Wir wollen zeigen, daß $I = (\varphi(r))$ gilt.
Ist $x \in I$, so existiert ein $y \in J$ mit $\varphi(y) = x$. Da $y \in J$ ist, existiert eine Darstellung

$$y = a \cdot r + r \cdot b + n.r + \sum_{1=1}^{m} a_i \cdot r \cdot b_i$$

für geeignete Elemente $a, a_1, ..., a_m, b, b_1, ..., b_m \in R, m \in \mathbb{N} - \{0\}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= \varphi(y) = \varphi\left(a \cdot r + r \cdot b + n.r + \sum_{1=1}^{m} a_i \cdot r \cdot b_i\right) \\ &= \varphi(a) \cdot \varphi(r) + \varphi(r) \cdot \varphi(b) + n.\varphi(r) + \sum_{1=1}^{m} \varphi(a_i) \cdot \varphi(r) \cdot \varphi(b_i). \end{aligned}$$

Somit gilt $I \subseteq (\varphi(r))$. Da $\varphi(r) \in I$ gilt auch $(\varphi(r)) \subseteq I$ und die Behauptung ist gezeigt.

(c) Die Quotientenabbildung $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus. Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, ist auch $\mathbb{Z}_n$ ein Hauptidealring.