Lineare Algebra I
2. Tutoriumsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Jan H. Bruinier
Claudia Alfes
Stephan Ehlen

Wintersemester 2012/13
02.11.2012

Im Folgenden finden Sie eine kurze Zusammenfassung der Ausführungen zur vollständigen Induktion.

1 Vollständige Induktion

Wir benutzen die vollständige Induktion, um eine Aussage der folgenden Form zu zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; A(n).$$

Hierbei ist $A(n)$ ein Prädikat, das heißt, für alle natürlichen Zahlen ist eine Aussage $A(n)$ gegeben und wir wollen zeigen, dass diese für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Die geht mittels des Prinzips der vollständigen Induktion folgendermaßen:

a) **Induktionsanfang**: Zeige, dass die Aussage $A(1)$ wahr ist.

b) **Induktionsschluss**:
   1. *Induktionsannahme:* Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, die Aussage $A(n)$ sei wahr.
   2. *Induktionsschritt* $(n \to n+1)$: Zeige, dass unter der Induktionsannahme auch $A(n+1)$ wahr ist.

Es folgt dann, dass die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Beispiel 1. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.*
In Worten: Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$ ist gleich n^2.

Beweis. Die Aussage $A(n)$ ist in diesem Fall:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

a) **Induktionsanfang**: Die Aussage $A(1)$ ist wahr: $1 = 1^2$.

b) **Induktionsschluss**:
   1. *Induktionsannahme*: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, die Aussage $A(n)$ sei wahr.
      Es gelte also für dieses (feste) $n \in \mathbb{N}$, dass
      $$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$
      gilt.
   2. *Induktionsschritt* $(n \to n+1)$:
      Wir müssen zeigen, dass unter der Induktionsannahme auch $A(n+1)$ wahr ist. Also gilt es zu zeigen:
      $$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2.$$

Wir berechnen also

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2(n+1)-1\\ &= n^2+2n+2-1 \text{ (Wegen der Induktionsannahme)}\\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

Somit gilt die Aussage auch für $n+1$ und nach dem Induktionsprinzip für alle $n \in \mathbb{N}$.

□

1.1 Variante 1

- Anstatt bei $n = 1$ zu beginnen, kann man die Induktion auch bei einem $n_0 \in \mathbb{N}$ beginnen. Man zeigt dann, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr ist.
- Die Gültigkeit dieses Prinzips folgt direkt aus dem oben beschriebenen Induktionsprinzip. Um dies einzusehen, definiert man $B(n) = A(n_0 + n)$ und wendet die vollständige Induktion wie oben beschrieben auf $B(n)$ an.

Beispiel 2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt:* $2^n > n^2$.

Beweis.

a) **Induktionsanfang**: Die Aussage $A(5)$ ist wahr: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

b) **Induktionsschluss**:

1. *Induktionsannahme*: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$. Wir nehmen an, die Aussage $A(n)$ sei wahr.
   Es gelte also für dieses (feste) $n \in \mathbb{N}$, dass

   $$2^n > n^2$$

   gilt.
2. *Induktionsschritt* ($n \to n+1$):
   Wir müssen zeigen, dass unter der Induktionsannahme auch $A(n+1)$ wahr ist. Also gilt es zu zeigen:

   $$2^{n+1} > (n+1)^2.$$

   Wir berechnen also

   $$\begin{aligned}2^{n+1} &= 2\cdot 2^n\\ &> 2\cdot n^2 \text{ (Wegen der Induktionsannahme)}\\ &= n^2+n\cdot n\\ &\geq n^2+5\cdot n \text{(Wegen } n\geq 5)\\ &\geq n^2+2n+1\\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

   Hierbei haben wir benutzt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $5n \geq 2n+1$. Dies lässt sich leicht in einer separaten Induktion nachweisen. (Das ist auch eine gute, einfache Übung.)

   Somit gilt die Aussage auch für $n+1$ und nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$.

□

1.2 Variante 2

Eine weitere Variante benutzt eine stärkere Annahme im Induktionsschluss. Anstatt anzunehmen, dass für ein festes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ wahr sei, können wir sogar annehmen, dass $A(k)$ für $n_0 \leq k \leq n$ wahr sei. Das Schema sieht dann so aus:

a) **Induktionsanfang**: Zeige, dass die Aussage $A(n_0)$ wahr ist.

b) **Induktionsschluss**:

   1. *Induktionsannahme:* Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, die Aussagen $A(n_0), \ldots, A(n)$ seien wahr.
   2. *Induktionsschritt* $(n \to n+1)$: Zeige, dass unter der Induktionsannahme auch $A(n+1)$ wahr ist.

Es folgt dann, dass die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ wahr ist.