Lineare Algebra I
1. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Jan H. Bruinier
Claudia Alfes
Stephan Ehlen

Wintersemester 2012/13
24.10.2012

Im Folgenden finden Sie eine kurze Zusammenfassung der Ausführungen zur Aussagenlogik, der Prädikatslogik und zu Mengen. Bitte nehmen Sie dieses erste Tutoriumsblatt auch mit in die erste Übung.

Diese Grundlagen zur Logik und zu Mengen sollen Ihnen dabei behilflich sein, die Struktur mathematischer Sätze zu analysieren. Sie helfen Ihnen, Beweise formal richtig zu führen.

1 Aussagenlogik

- Unter einer *Aussage* (auch: Proposition) verstehen wir einen Satz, der genau einen von zwei Wahrheitswerten annehmen kann: "wahr" (1) und "falsch" (0).
- Wir unterscheiden zwischen zusammengesetzten Aussagen und elementaren oder unzerlegbaren Aussagen.
- Elementare Aussagen enthalten keine Verknüpfungen. Wir nehmen an, dass wir den Wahrheitswert von elementaren Aussagen bestimmen können.
- Zusammengesetze Aussagen erhalten wir, indem wir elementare Aussagen verknüpfen. Der Wahrheitswert zusammengesetzer Aussagen ist eindeutig durch die Wahrheitswerte der enthaltenen elementaren Aussagen bestimmt.

1.1 Verknüpfungen

1.1.1 Negation

A	$\neg A$
0	1
1	0

1.1.2 Konjunktion (Und)

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

1.1.3 Disjunktion (Oder)

A	B	$A \vee B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

1.1.4 Implikation

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	1	1

1.1.5 Bikonditional (Äquivalenz)

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

In Worten sagt man auch „A gilt, genau dann, wenn B gilt.".

Beispiel 1. *Aus der Wahrheitswertetabelle zur Implikation lesen wir direkt ab:*

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

1.1.6 Die Regeln von De Morgan

Satz 1. *Für beliebige Aussagen A, B gilt*

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

sowie

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B).$$

Beweis. Wir beweisen dies mittels der entsprechenden Wahrheitswertetabellen.

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
0	0	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	1	1	0	0

Und ebenso

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	1	1	0	0

□

1.1.7 Hinreichende und notwendige Bedingung

Bei der Implikation $A \Rightarrow B$ heißt A auch *hinreichende Bedingung* für B und B heißt *notwendige Bedingung* für A. Dies kommt daher, dass, wenn A wahr ist, so ist auch B der Fall (A ist hinreichend für B). Ist jedoch B falsch, so kann A nicht wahr sein. Das heißt, die Wahrheit von B ist notwendig für die Wahrheit der Aussage A.

Wichtig ist, nochmals fest zu halten, dass die Implikation $A \Rightarrow B$ immer wahr ist, wenn A falsch ist. Man sagt umgangssprachlich auch, dass man aus etwas Falschem alles folgern kann. Das ist jedoch nicht korrekt (was soll das bedeuten?). Sondern es ist so, dass, falls A falsch ist und die Implikation $A \Rightarrow B$ wahr ist, so kann man dennoch nichts über die den Wahrheitswert der Aussage B aussagen. Denn A ist eben nicht hinreichend für B.

1.1.8 Etwas Übung

Proposition 1. *Für alle Aussagen A, B, C gelten die folgenden beiden Aussagen:*

a) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

b) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$.

Beweis. Übung. □

1.1.9 Rezept 1

Aus der Proposition leiten wir folgendes Rezept her. Wenn es gilt, eine Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ zu beweisen, so machen wir dies in zwei Schritten:

1) Zeige $A \Rightarrow B$.

2) Zeige $B \Rightarrow A$.

2 Quantoren / Prädikatslogik

Nach einfacher Aussagenlogik müssten die folgenden Aussagen elementare Aussagen sein.

a) Für jede positive reelle Zahl gibt es eine positive reelle Zahl, die kleiner ist.

b) Alle natürlichen Zahlen sind durch 3 teilbar.

Wir wollen solche Aussagen weiter zerlegen. Hierzu benutzen wir Quantoren und Prädikate. Ein Prädikat ist dabei eine Aussage $A(x)$ mit einer (oder mehreren) "Leerstelle"(n) oder einer Variablen.

Beispiel 2. $A(x)$: *x ist durch 3 teilbar.*

2.1 Der Allquantor: ∀

$$\boxed{\text{Schreibe: } (\forall x)\, A(x)}$$

Dabei ist die Aussage $(\forall x)\, A(x)$ wahr, genau dann, wenn $A(x)$ für alle möglichen x wahr ist. Der Allquantor ist also eine Verallgemeinerung der Konjunktion.

2.2 Der Existenzquantor: ∃

$$\boxed{\text{Schreibe: } (\exists x)\, A(x)}$$

Dabei ist die Aussage $(\exists x)\, A(x)$ wahr, genau dann, wenn es mindestens ein x gibt, so dass $A(x)$ wahr ist. Der Existenzquantor ist also eine Verallgemeinerung der Disjunktion.

2.3 Die De Morganschen Regeln für Quantoren

Analog zur Konjunktion und Disjunktion gilt für die Quantoren:

Satz 2. *Es gelten die Regeln*

a) $\neg((\forall x)\, A(x)) \Leftrightarrow ((\exists x)\, \neg A(x))$

b) $\neg((\exists x)\, A(x)) \Leftrightarrow ((\forall x)\, \neg A(x))$

3 Mengen

3.1 Definition von Mengen

Wir können Mengen mit Hilfe von Prädikaten definieren. Dabei schreiben wir

$$\boxed{M := \{x :\ A(x)\}}$$

für die Menge aller x für die $A(x)$ wahr ist.

- Wir verwenden das Zeichen „:=", um eine Definition zu kennzeichnen. Das heißt die linke Seite (M) wird durch die rechte Seite definiert.
- Wir benutzen geschweifte Klammern „{" und „}", um Mengen zu definieren.
- Außerdem benutzen wir noch folgende Schreibweise: Ist x ein Element der Menge M, so schreiben wir $x \in M$. Ist diese Aussage falsch, so schreiben wir $x \notin M$.
- Gleichheit von Mengen: Zwei Mengen M, N sind gleich, genau dann, wenn sie die gleichen Elemente haben. Wir schreiben in diesem Fall $M = N$. Also:
  $$(M = N) \Leftrightarrow (\forall x)((x \in M) \Leftrightarrow (x \in N)).$$
  Für $\neg(M = N)$ schreiben wir auch $M \neq N$.

3.2 Teilmengen

Definition 1. *Eine Menge N heißt* Teilmenge *einer Menge M, falls gilt:*

$$(\forall x)((x \in N) \Rightarrow (x \in M)).$$

Wir schreiben in diesem Falle $N \subset M$.

ACHTUNG: Das Zeichen $N \subset M$ wird von manchen Mathematikern in einer leicht anderen Bedeutung verwendet. Es bedeutet dann, dass N Teilmenge von M ist, jedoch $N \neq M$ gilt, also N eine **echte** Teilmenge von M ist. Unsere Definition von $N \subset M$ hingegen lässt zu, dass $N = M$ gilt. Wir schreiben für $(N \subset M) \wedge (N \neq M)$ auch $N \subsetneq M$.

3.2.1 Rezept 2

Bei der Mengengleichheit handelt es sich per Definitionem um eine Äquivalenz. Deshalb können wir auch hier folgende Regel formulieren. Wenn es gilt, eine Mengengleichheit $M = N$ zu beweisen, so machen wir dies in zwei Schritten:

1) Zeige $M \subset N$.

2) Zeige $N \subset M$.

3.2.2 Abkürzungen

Wir benutzen in der Regel die folgenden Abkürzungen, damit die Formeln besser lesbar werden:
Anstatt $(\forall x)((x \in M) \Rightarrow A(x))$ schreiben wir

$$\boxed{\forall x \in M : \ A(x).}$$

Anstatt $(\exists x)((x \in M) \Rightarrow A(x))$ schreiben wir

$$\boxed{\exists x \in M : \ A(x).}$$

3.3 Mengenoperationen

Analog zu den Verknüpfungen von Aussagen definieren wir Mengenoperationen.

3.3.1 Schnitt

Seien M, N Mengen. Dann definieren wir den *Durchschnitt* von M und N als die Menge

$$M \cap N := \{x : (x \in M) \wedge (x \in N)\}.$$

3.3.2 Vereinigung

Ebenso definieren wir die *Vereinigung* der Mengen M und N als

$$M \cup N := \{x : (x \in M) \vee (x \in N)\}.$$

3.3.3 Komplement

Es seien M und N Mengen. Wir definieren das *Komplement* von N in M als die Menge

$$M \setminus N := \{x : (x \in M) \wedge (x \notin N)\}.$$