Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. B. Kümmerer

Funktionalanalysis WS 2012/13

Grundbegriffe der (mengentheoretischen) Topologie

1. **Ziel:** Schaffe einen allgemeinen Rahmen zur Diskussion des Begriffes der Stetigkeit

   Ausgangspunkt: Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}^m$ sind äquivalent:

   a) f ist stetig

   b) Das Urbild einer offenen Menge unter f ist offen.

   Idee: Axiomatisiere den Begriff der offenen Menge und charakterisiere Stetigkeit durch obige Eigenschaft (b).

   Die Durchführung dieser Idee geht maßgeblich zurück auf Felix Hausdorff (1868–1942), der die Topologie begründete in seinem epochalen Buch „Grundzüge der Mengenlehre", erschienen 1914. Hausdorff war einer der bedeutendsten Mathematiker der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Unter dem Pseudonym Paul Mongré war er auch als Schriftsteller erfolgreich. Am 26.1.1942 entzog er sich mit seiner Frau und seiner Schwägerin der Deportation in ein Konzentrationslager durch Freitod.

2. Axiomatisierung offener Mengen.

   Sei X Menge. Ein System von Teilmengen $\mathcal{T} \subseteq \wp(X)$ heißt **Topologie** auf X, falls

   (T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$

   (T2) $0_1, 0_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow 0_1 \cap 0_2 \in \mathcal{T}$

   (T3) $0_i \in T \ \forall\, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} 0_i \in \mathcal{T}$ für eine beliebige Indexmenge I.

   In diesem Fall heißt $(X, \mathcal{T})$ **topologischer Raum**, $0 \in \mathcal{T}$ heißt **offene Menge**.

   $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, falls $X \setminus A$ offen. Für $A \subseteq X$ heißt die kleinste abgeschlossene Menge $\bar{A}$ mit $A \subseteq \bar{A}$ der **Abschluss** von A.

   Für $x \in X$ heißt $U \subseteq X$ **Umgebung von** x, falls es $V \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in V \subseteq U$.

   Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **Hausdorffraum**, falls für $x, y \in X$, $x \neq y$ Umgebungen U von x und V von y existieren mit $U \cap V = \emptyset$.

   Ein System $\mathfrak{U}$ von Umgebungen von x heißt **Umgebungsbasis**, falls für jede Umgebung V von x ein $U \in \mathfrak{U}$ existiert mit $U \subseteq V$.
   Im folgenden sei immer $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

   Ist $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum und $Y \subseteq X$, dann ist $\mathcal{T}_{|_Y} := \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf Y, die **relative Topologie** oder **Spurtopologie** auf Y. Wenn nichts anderes gesagt ist, betrachten wir auf Teilmengen immer die Spurtopologie.

3. Konvergenz.

   Sei $x \in X$. Ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ heißt konvergent gegen x, falls für jede Umgebung U von x ein $i_0 \in I$ existiert mit $x_i \in U$ für alle $i \geq i_0$. Schreibe $\lim_i x_i = x$.

   Satz: Sei $A \subseteq X$. Für $x \in X$ sind äquivalent

   a) $x \in \bar{A}$, dem Abschluss von A,

   b) Es ex. ein Netz $(x_i)_{i\in I} \subseteq A$ mit $\lim_i x_i = x$.

4. Stetige Abbildungen

   Satz. Seien $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ topologische Räume. Für $f : X \to Y$ sind äquivalent.

   a) Das Urbild offener Mengen ist offen.

   b) Das Urbild abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

   c) Für jedes $x_0 \in X$ gilt: Für jede Umgebung V von $f(x_0)$ existiert eine Umgebung U von x_0 mit $f(U) \subseteq V$.

   d) Für jedes $x_0 \in X$ gilt: Falls $\lim_i x_i = x_0$, dann ist $\lim_i f(x_i) = f(x_0)$.

   Falls f diese Bedingungen erfüllt, heißt f **stetig**. Erfüllt f die Bedingung (c) oder (d) in einem Punkt x_0, so heißt f **stetig in $\mathbf{x_0}$**.

   Ist f bijektiv und sind f und f^{-1} stetig, so heißt f ein **Homöomorphismus**.

5. Vergleich von Topologien.

   Sind $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf X, dann sind offenbar äquivalent

   a) $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$

   b) Die Identität $id : (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ ist stetig.

   In diesem Fall heißt $\mathcal{T}_1$ **gröber** als $\mathcal{T}_2$ oder $\mathcal{T}_2$ **feiner** als $\mathcal{T}_1$.

6. Erzeugung von Topologien.

   Sei X Menge und $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Topologien auf X. Dann ist $\mathcal{T} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ eine Topologie auf X, die feinste Topologie die gröber ist als alle Topologien $\mathcal{T}_i, i \in I$.

   Also: Ist $\mathcal{T}_0 \subseteq \wp(x)$, dann existiert eine gröbste Topologie $\mathcal{T}$, so dass $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$, d.h., alle Mengen in $\mathcal{T}_0$ sind offen. $\mathcal{T}$ heißt die von $\mathcal{T}_0$ **erzeugte Topologie** und $\mathcal{T}_0$ eine **Subbasis** für $\mathcal{T}$. $\mathcal{T}_0$ heißt **Basis** für $\mathcal{T}$, falls jedes Element in $\mathcal{T}$ Vereinigung von Elementen in $\mathcal{T}_0$ ist.

7. Initiale Topologie und Produkttopologie.

   Sei X Menge, $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume für $i \in I$, und seien $X \to Y_i$ Abbildungen.

   Die von $\{f_i^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{T}_i, i \in \mathcal{T}\}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}$ auf X ist die gröbste Topologie auf X, bezüglich der alle Abbildungen f_i, $i \in I$, stetig sind, und heißt die durch $(f_i)_{i \in I}$ definierte **initiale Topologie** oder **schwache Topologie** auf X.

   Proposition: Ist $(Z, \mathcal{S})$ topologischer Raum, so ist $g : (Z, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T})$ genau dann stetig, wenn $f_i \circ g : (Z, \mathcal{S}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ stetig ist für alle $i \in I$.

   Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume $(i \in I)$. $X := \mathop{\times}\limits_{i \in I} X_i$, $\pi_i : X \to X_i$ die i–te Koordinatenabbildung.

   Die **Produkttopologie** auf X ist die initiale Topologie der Abbildungen $(\pi_i)_{i \in I}$.

   Beispiel: Ist X Menge und $(Y, \mathcal{T})$ topologischer Raum, so ist die Produkttopologie auf dem Raum Y^X aller Abbildungen von X nach Y gerade die Topologie der punktweisen Konvergenz.

8. Kompakte topologische Räume.

   Für einen Hausdorffraum $(X, \mathcal{T})$ sind äquivalent.

   a) Jede offene Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung.
   b) Sind $(A_i)_{i \in I}$ abgeschlossene Teilmengen von X und für je endliche viele Indizes $i_1, \ldots, i_n \in I$ gilt:
      Ist $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n} \neq \emptyset$, dann ist $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.
   c) Jedes Netz $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$ besitzt ein konvergentes Teilnetz.
   (c') Jedes Netz $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$ besitzt einen Häufungspunkt in X.

   In diesem Fall heißt $(X, \mathcal{T})$ **kompakt**.

   Bemerkung: Manchmal wird auf die Voraussetzung „Hausdorffraum“ verzichtet.

   Ist $(X, \mathcal{T})$ kompakt, so ist $A \subseteq X$ genau dann kompakt wenn A abgeschlossen ist.

   Im allgemeinen heißt A **relativ kompakt**, falls $\bar{A}$ kompakt ist.

9. Stetige Abbildungen auf kompakten Mengen.

   Sei $(X, \mathcal{T})$ kompakt, $(Y, \mathcal{S})$ Hausdorffraum.

   a) Ist $f : X \to Y$, stetig, dann ist $f(X)$ kompakt.
   b) Ist $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ stetig, dann nimmt f auf X Maximum und Minimum an.
   c) Ist $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, dann ist f Homöomorphismus.

10. Der Satz von Tychonoff.

    Ist $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologischer Raum für $i \in I$. Dann ist $\mathop{\times}\limits_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie kompakt genau dann, wenn für alle $i \in I$ die Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt sind.