Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Prof. B. Kümmerer

Funktionalanalysis WS 2012/13

B. Kümmerer

Einheitskugel und topologische Grundbegriffe

Vorbemerkung: Ist $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, so ist $d(x,y) := ||y-x||$ eine Metrik auf E. Somit können die Vokabeln aus der Theorie metrischer Räume auch im Kontext normierter Räume benutzt werden.

Zur Sicherheit ein paar der wichtigsten Vokabeln in der Sprache der normierten Räume. Es sei wie oben immer $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Raum.

- Für $x \in E$ und $r > 0$ heißt
$$K_r(x) := \{y \in E : ||y-x|| < r\}$$
die *offene Kugel um x mit Radius r*.
- Ist $M \subseteq E$, so heißt $x \in M$ ein *innerer Punkt* von M, falls $K_r(x) \subseteq M$ für ein geeignetes $r > 0$.
- $M \subseteq E$ heißt *offen*, falls jeder Punkt $x \in M$ innerer Punkt von M ist.
- $M \subseteq E$ heißt *abgeschlossen* falls das Komplement von M in E offen ist.
- Der *Abschluss* $\overline{M}$ von $M \subseteq E$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von E, die M enthält. $\overline{M}$ kann charakterisiert werden als die Menge aller Häufungspunkte von Folgen in M.
- Ist $M \subseteq E$, so heißt $Y \subseteq M$ *dicht* in M, falls $M \subseteq \overline{Y}$.
- $E_1 := \overline{K_1(0)} = \{x \in E : ||x|| \leq 1\}$ heißt die *abgeschlossene Einheitskugel* von E.
- $M \subseteq E$ heißt *beschränkt*, falls es $C > 0$ gibt mit $||x|| \leq C$ für alle $x \in M$, d.h., wenn $M \subseteq C \cdot E_1$.