Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 10. Februar 2009

Algebra

15. Übung

Aufgabe 68 (Erzeugte Untermoduln) Sei R ein beliebiger Ring, M ein R-Modul und X eine beliebige Teilmenge von M. Zeige, daß der von X erzeugte Untermodul N vom M gleich der Menge

$$Y := \left\{ \sum_{i=1}^{s} r_i a_i + \sum_{j=1}^{t} n_j b_j \middle| s, t \in \mathbb{N}; a_i, b_j \in X, r_i \in R, n_j \in \mathbb{Z} \right\}$$

ist.

Zeige, daß, wenn R eine Eins besitzt und M unitär ist, der von X erzeugte Untermodul gleich der Menge

$$RX := \left\{ \sum_{k=1}^{s} r_i a_i \middle| s \in \mathbb{N}^+; a_i \in X; r_i \in R \right\}$$

ist.

Aufgabe 69 (Isomorphiesätze) Sei R ein Ring, M ein R-Modul und N_1, N_2 Untermoduln von M. Zeige folgende Aussagen:

(a) Es gibt einen Isomorphismus $\alpha : N_1/(N_1 \cap N_2) \to (N_1 + N_2)/N_2$ mit

$$\alpha(x + N_1 \cap N_2) = x + N_2$$

für alle $x \in N_1$.

(b) Ist $N_2 \subseteq N_1$, so gibt es einen Isomorphismus $\beta : (M/N_2)/(N_1/N_2) \to M/N_1$ mit

$$\beta(x + N_2 + (N_1/N_2)) := x + N_1$$

für alle $x \in M$.

Aufgabe 70 (Nicht freie Moduln) Gib ein Beispiel eines nicht freien Moduls über einem Ring an.

Aufgabe 71 (Endomorphismen) Zeige, daß es Isomorphismen $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$ gibt.

Aufgabe 72 (Kurzes Fünferlemma) Folgendes Diagramm habe exakte Zeilen und sei kommutativ

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\chi_1"] \arrow[d, "f"] & N_1 \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "g"] & Q_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "\chi_2"] & N_2 \arrow[r, "\sigma_2"] & Q_2 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

(a) Zeige folgende Aussagen:

(1) Sind f und h surjektiv, so ist auch g surjektiv.

(2) Sind f und h injektiv, so ist auch g injektiv.

(3) Sind f und h Isomorphismen, so ist auch g ein Isomorphismus.

Im Fall (3) heißen die beiden kurzen exakten Sequenzen *isomorph*.

(b) Zeige, daß für kurze exakte Sequenzen Isomorphie eine Äquivalenzrelation definiert.

Aufgabe 73 (Elementarteilersatz) Sei $A = (a_{i,j})$ eine $n \times n$ - Matrix mit Einträgen in $\mathbb{Z}$. Setze für $1 \leq i \leq n$

$$w_i := (a_{i,1}, ..., a_{i,n})$$

und

$$N := \mathbb{Z}w_1 + ... + \mathbb{Z}w_n.$$

Zeige, daß $\mathbb{Z}^n/N$ genau dann endlich ist, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. In diesem Fall gilt weiter

$$|\mathbb{Z}^n/N| = |\det(A)|.$$