Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 3. Februar 2009

Algebra

14. Übung

Aufgabe 63 Sei $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ galoissch mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ und $|G| = p$ für p prim. Zeige, daß für ein Element $\alpha \in \mathbb{L}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Es ist $\alpha \in \mathbb{K}$.

(2) Es ist $\alpha \in \mathbb{L}^G$.

(3) Es gibt ein $\mathrm{id} \neq \sigma \in G$ mit $\sigma(\alpha) = \alpha$.

Aufgabe 64 (Zyklische Galoiserweiterungen) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik 0, ξ eine n-te primitive Einheitswurzel und $\xi \in \mathbb{K}$. Sei weiter $a \in \mathbb{K}$, α eine Wurzel des Polynoms $f := X^n - a$ und $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$.

(a) Zeige, daß $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ galoissch ist.

(b) Zeige, daß für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ auch $\sigma(\alpha)$ eine Wurzel von f ist.

(c) Zeige, daß $\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}$ eine n-te Einheitswurzel ist.

Wir setzen $\xi_\sigma := \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}$ für $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$.

(d) Zeige, daß die Abbildung $\varphi : \mathrm{Gal}(\mathbb{L}, \mathbb{K}) \to U_n$, $\varphi(\sigma) := \xi_\sigma$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

(e) Folgere, daß $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ zyklisch ist.

Aufgabe 65 (Auflösbare Gruppen) Eine *Normalreihe* einer Gruppe G ist eine Kette von Untergruppen

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_n = \{\mathbb{1}\}.$$

Die Quotientengruppen G_i/G_{i+1} heißen die *Faktoren* der Normalreihe. Eine Gruppe G heißt *auflösbar*, wenn es eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren gibt.

(a) Zeige, daß jede abelsche Gruppe G auflösbar ist.

(b) Zeige, daß jede Untergruppe H einer auflösbaren Gruppe G ebenfalls auflösbar ist.

(c) Zeige, daß die Gruppe S_n für $n > 4$ nicht auflösbar ist.

Hinweis: *Du kannst als bekannt vorraussetzen, daß die alternierende Gruppe A_n für $n \neq 4$ eine einfache Gruppe ist.*

Aufgabe 66 (Auflösbare Galoiserweiterungen) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper der Charakteristik 0 und f ein Polynom aus $\mathbb{K}[X]$ vom Grad > 0. Weiter sei der Zerfällungskörper von f durch Radikale auflösbar mit Kette von Zwischenkörpern

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{K}_m = \mathbb{L},$$

so daß $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ galoissch ist und $\mathbb{L}$ den Zerfällungskörper von f enthalte. Weiter entstehe $\mathbb{K}_1$ durch Adjunktion einer n-ten primitiven Einheitswurzel zu $\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}_{i+1}$ durch Adjunktion einer Nullstelle eines geeigneten Polynoms $f_{i+1} = X^{d_i} - a_i$ zu $\mathbb{K}_i$, wobei $a_i \in \mathbb{K}_i$ liege und jedes d_i die Zahl n teile.

(a) Zeige, daß $\xi^{\frac{n}{d_i}}$ für jedes $1 \leq i \leq m$ eine primitive d_i-te Einheitswurzel ist.

(b) Zeige, daß $\mathbb{K}_{i+1}/\mathbb{K}_i$ und $\mathbb{K}_1/\mathbb{K}_0$ abelsche Galoiserweiterungen sind.

Es bezeichne G_i die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}, \mathbb{K}_i)$.

(c) Zeige, daß die zum Erweiterungsturm korrespondierende Reihe von Gruppen

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{L}, \mathbb{K}) = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_{m-1} \supseteq G_m = \{\mathbb{1}\}$$

eine Normalreihe von G mit abelschen Faktoren ist. Folgere, daß die Galoisgruppe eines durch Radikale auflösbaren Polynoms eine auflösbare Gruppe ist.

(d) Sei $f \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom und $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine wie in der Vorlesung definierte Auflösung durch Radikale des Zerfällungskörpers von f. Sei die Erweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ zusätzlich galoissch. Zeige, daß es einen Körperturm

$$\mathbb{K} = \tilde{\mathbb{K}}_0 \subseteq \tilde{\mathbb{K}}_1 \subseteq \ldots \subseteq \tilde{\mathbb{K}}_m = \mathbb{L}$$

gibt, welche die Eigenschaften der Aufgabenstellung besitzt und den Zerfällungskörper von f durch Radikale auflöst.

Man kann zeigen, daß, wenn der Zerfällungskörper $\mathbb{F}$ von f durch Radikale auflösbar ist als Zwischenkörper von $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, daß dann der Zerfällungskörper auch durch Radikale auflösbar ist als Zwischenkörper von $\tilde{\mathbb{L}}/\mathbb{K}$, so daß diese Körpererweiterung zusätzlich galoissch ist.

(e) Die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers des Polynoms $X^5 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$ ist die S_5. Folgere, daß es keine Lösungsformel für die Nullstellen von f geben kann, welche durch ineinandergeschachtelte Wurzelausdrücke von Koeffizienten von f gegeben ist. Somit kann es kein Pendant zur pq-Formel für Polynome vom Grad 5 geben.

Aufgabe 67 (Mehr zu auflösbaren Gruppen) Die *Kommutatorgruppe* $[G, G]$ einer Gruppe G ist die kleinste Untergruppe von G, die alle Kommutatoren $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$ enthält.

(a) Zeige, daß eine Gruppe genau dann abelsch ist, wenn $[G, G] = \{\mathbb{1}\}$ gilt.

(b) Zeige, daß $[G, G]$ die kleinste normale Untergruppe von G mit abelschem Quotienten ist.

Wir setzen $G^0 := G$ und $G^{n+1} := [G^n, G^n]$. Die Gruppe G^{n+1} heißt die $n+1$*-te iterierte Kommutatorgruppe von* G.

(c) Zeige, daß eine Gruppe G genau dann auflösbar ist, wenn es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $G^n = \{\mathbb{1}\}$.

(d) Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler in G und $Q := G/N$ die Quotientengruppe. Zeige, daß G genau dann auflösbar ist, wenn N und Q auflösbar sind.

(e) Warum ist ein (semi-)direktes Produkt von auflösbaren Gruppen G und H wieder auflösbar?

Hausübungen

Aufgabe H27 (Kreisteilungskörper I) Sei a eine primitive siebte Einheitswurzel, dann ist $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ galoissch als Zerfällungskörper von $\Phi_7 = X^6 + X^5 + ... + X + 1$. Es bezeichne G die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(a), \mathbb{Q})$.

(a) Zeige, daß ein $\sigma \in G$ existiert mit $\sigma(a) = a^3$.

(b) Zeige, daß σ die Gruppe G erzeugt.

(c) Zeige, daß für jedes $z \in \mathbb{Q}(a)$ die Gleichung $\sigma^3(z) = \overline{z}$ gilt, sofern wir $\mathbb{Q}(a) \subseteq \mathbb{C}$ verstehen.

(d) Bestimme das Minimalpolynom von $b := a + a^6$ und von $c := a + a^2 + a^4$ in $\mathbb{Q}[X]$.

(e) Zeige, daß die einzigen echten Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ durch die Erweiterungen $\mathbb{Q}(b)/\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(c)/\mathbb{Q}$ gegeben sind.

Aufgabe H28 (Kreisteilungskörper II) Sei $\mathbb{L} := \mathbb{Q}(\xi_8)$ der achte Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$, es sei also ξ_8 eine primitive achte Einheitswurzel. Bestimme die Galoisgruppe der Erweiterung, deren Untergruppen und alle Zwischenkörper der Erweiterung. Welche der Zwischenkörper sind ebenfalls galoissch über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe H29 (Bonusaufgabe: Inverses Galoisproblem) Zeige mit Hilfe der Theorie über Kreisteilungserweiterungen, daß es eine galoissche Körpererweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{Q}$ gibt mit $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}, \mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_7$.