Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 08/09 27. Januar 2009

Algebra

13. Übung

Aufgabe 59 (Primkörper) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K})$ ein Automorphismus. Zeige, daß der Primkörper $\mathbb{P}$ von $\mathbb{K}$ im Fixkörper von σ liegt.

Aufgabe 60 (Zyklische Galoiserweiterungen) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik $p > 0$, $f(X) := X^p - X - a$ sei ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{K}[X]$ und es sei $\mathbb{L}$ ein Zerfällungskörper von f.

(a) Zeige: Ist $\alpha \in \mathbb{L}$ eine Nullstelle von f, so auch $\alpha + 1$.

(b) Zeige, daß $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine Galoiserweiterung mit zyklischer Galoisgruppe ist und bestimme die Ordnung der Galoisgruppe.

(c) Bestimme alle Zwischenkörper der Galoiserweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$.

Aufgabe 61 (Abelsche Galoiserweiterungen) Sei $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine galoissche Körpererweiterung. Wir nennen $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ abelsch, bzw. zyklisch, wenn die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$ abelsch bzw. zyklisch ist.

(a) Es sei $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine abelsche Galoiserweiterung. Zeige, daß dann für jeden Zwischenkörper $\mathbb{F}$ auch $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ eine abelsche Galoiserweiterung ist.

(b) Es sei $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine zyklische Galoiserweiterung. Zeige, daß dann für jeden Zwischenkörper $\mathbb{F}$ auch $\mathbb{F}/\mathbb{K}$ eine zyklische Galoiserweiterung ist.

(c) Es sei $f \in \mathbb{K}[X]$ ein separables irreduzibles Polynom und $\mathbb{L}$ ein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{K}$, so daß $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine endliche abelsche Galoiserweiterung ist. Zeige, daß jede Nullstelle $\alpha \in \mathbb{L}$ von f ein primitives Element ist, also $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$ gilt.

Aufgabe 62 (Einheitswurzeln) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$ seien teilerfremd.

(a) Zeige, daß dann die Abbildung

$$h : U_m \times U_n \ni (\xi, \eta) \to \xi \cdot \eta \in U_{mn}$$

ein Isomorphismus von Gruppen ist.

(b) Es sei $\xi_m \in U_m$ eine primitive m-te Einheitswurzel und $\xi_n \in U_n$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Zeige, daß $\xi_m \cdot \xi_n \in U_{m \cdot n}$ eine primitive mn-te Einheitswurzel ist.

Aufgabe 63 (Eine Klasse irreduzibler Polynome) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $a \in \mathbb{K}$ und p eine Primzahl. Zeige, daß das Polynom $X^p - a$ genau dann irreduzibel ist, wenn es keine Nullstelle in $\mathbb{K}$ hat.

Hausübungen

Aufgabe H25 (Eulersche φ-Funktion) Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die eulersche φ-Funktion.

(a) Zeige, daß φ für teilerfremde Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ multiplikativ ist, es gilt also

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n).$$

(b) Sei p prim und $k \in \mathbb{N}$. Berechne $\varphi(p^k)$.

(c) Berechne $\varphi(1980)$.

Aufgabe H26 (Charakterisierung von Galoiserweiterungen)

(a) Es sei $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

  (1) Die Erweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ ist galoissch.

  (2) Der Körper $\mathbb{K}$ ist Fixkörper der Gruppe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$.

  (3) Es gilt $|\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})| = [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.

(b) Zeige, daß eine algebraische Körpererweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ genau dann galoissch ist, wenn $\mathbb{K}$ der Fixkörper unter der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$ ist.