Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 08/09 20. Januar 2009

Algebra

12. Übung

Aufgabe 55 Sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper. Zeige, daß für jedes Element $a \in \mathbb{K}$ Elemente $b, c \in \mathbb{K}$ existieren mit $a = b^2 + c^2$.

Aufgabe 56 Entscheide, ob die Erweiterung $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ galoissch ist und bestimme die Gruppe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 57 Betrachte das Polynom $f(X) = X^3 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$ und den Zerfällungskörper $\mathbb{L}$ von f.

(a) Zeige, daß die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}, \mathbb{Q})$ isomorph zur D_3, der Diedergruppe mit 6 Elementen, ist.
Hinweis: *Finde einen $\mathbb{Q}$-Automorphismus von $\mathbb{L}$ der Ordnung 2 und einen der Ordnung 3.*

(b) Finde alle Untergruppen der Galoisgruppe und die zugehörigen Zwischenkörper von $\mathbb{L}/\mathbb{Q}$. Welche dieser Zwischenkörper sind ebenfalls galoissch über $\mathbb{Q}$?

(c) Finde ein primitives Element der Erweiterung.

Aufgabe 58 Es sei $\mathbb{L}$ ein Körper und G eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{L})$. Weiter setze

$$\mathbb{K} := \mathbb{L}^G = \{a \in \mathbb{L} : \sigma(a) = a \text{ für alle } \sigma \in G\}$$

den Fixkörper unter G.
Zeige, ist G nicht endlich, $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ aber algebraisch, so ist $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine unendliche Galoiserweiterung und G ist eine Untergruppe der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{L}, \mathbb{K})$.

Hausübungen

Aufgabe H23 (Algebraischer Abschluß) Sei $p > 0$ eine Primzahl. Wir starten mit

$$\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}_p$$

und wählen rekursiv für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Oberkörper $\mathbb{F}_{p^{(n+1)!}}$ von $\mathbb{F}_{p^{n!}}$ mit $p^{(n+1)!}$ Elementen. Damit erhalten wir eine Kette von Körpern

$$\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^{2!}} \subseteq \mathbb{F}_{p^{3!}} \subseteq \ldots$$

Wir setzen

$$\mathbb{F}_{p^\infty} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^{n!}}.$$

(a) Erkläre auf $\mathbb{F}_{p^\infty}$ eine Addition und Multiplikation, welche $\mathbb{F}_{p^\infty}$ zu einem Körper macht und die Körperoperationen jedes $\mathbb{F}_{p^{n!}} \subseteq \mathbb{F}_{p^\infty}$ fortsetzt.

(b) Zeige, daß $\mathbb{F}_{p^\infty}$ algebraisch abgeschlossen ist.

(c) Zeige, daß $\mathbb{F}_{p^\infty}$ ein algebraischer Abschluß von $\mathbb{Z}_p$ ist.

Aufgabe H24 (Abelsche Erweiterungen) Es seien $p_1, \ldots, p_n$ paarweise verschiedene Primzahlen und $\mathbb{L} := \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$. Zeige, daß $\mathbb{L}/\mathbb{Q}$ galoissch ist und bestimme die Galoisgruppe $G := \mathrm{Gal}(\mathbb{L}, \mathbb{Q})$.