Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 13. Januar 2009

Algebra

11. Übung

Aufgabe 50 Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(a) Sei $f \in \mathbb{K}[X]$ ein separables Polynom. Zeige, daß der Zerfällungskörper von f eine separable Erweiterung von $\mathbb{K}$ ist.

(b) Sei umgekehrt $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine separable Erweiterung und $f \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom, so daß $\mathbb{L}$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{K}$ ist. Ist dann auch f separabel?

Aufgabe 51 Es habe $\mathbb{K}$ Charakteristik $p > 0$ und es sei $\mathbb{K}(a)/\mathbb{K}$ eine algebraische Körpererweiterung. Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Das Minimalpolynom f von a ist separabel.

(2) $\mathbb{K}(a) = \mathbb{K}(a^p)$.

Aufgabe 52 Bestimme alle $\mathbb{Q}$-Automorphismen von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Welche Elemente sind gemeinsame Fixpunkte aller $\mathbb{Q}$-Automorphismen?

Aufgabe 53 Finde alle primitiven Elemente der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 54 Berechne den Körper $\mathbb{F}_9$ und bestimme die Ordnung der Elemente aus $\mathbb{F}_9^\times$.

Hausübungen

Aufgabe H21 (Automorphismen normaler separabler Erweiterungen) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $f \in \mathbb{K}[X]$ ein separables Polynom und $\mathbb{L}$ ein Zerfällungskörper von f. Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Die Gruppe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$ operiert transitiv auf den Nullstellen von f in $\mathbb{L}$.

(2) Das Polynom f ist irreduzibel.

Aufgabe H22 (Endliche Erweiterungen endlicher Körper) Es sei p eine Primzahl.

(a) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Charakteristik p. Zeige, daß jede endliche Erweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, deren Erweiterungsgrad nicht von p geteilt wird, separabel ist.

(b) Es seien $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ Zwischenkörper einer Körpererweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{Z}_p$. Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

   (1) $|\mathbb{K}_1| = |\mathbb{K}_2|$.

   (2) $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}_2$.