



Algebra

10. Übung

Aufgabe 47 Es sei \mathbb{K} ein Körper und $f \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Sei \mathbb{L} ein Zerfällungskörper von f über \mathbb{K} . Zeige folgende Behauptungen:

- (a) Der Erweiterungsgrad $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ ist ein Teiler von $n!$.
- (b) Gilt $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = n!$, so ist f irreduzibel.
- (c) Zeige, daß die Umkehrung von (b) nicht gilt.

Hinweis: Beim weiteren Bearbeiten des Übungsblatts wird sich Aufgabenteil (c) von alleine erledigen.

Aufgabe 48 Bestimme einen Zerfällungskörper \mathbb{L} des Polynoms $f(X) := X^4 + 2X^2 - 2$ über \mathbb{Q} und bestimme den Erweiterungsgrad $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 49 Bestimme einen Zerfällungskörper \mathbb{L} der Familie

$$\left\{ f(X) := X^4 + 1, \quad g(X) := X^5 + 2 \right\}$$

über \mathbb{Q} und den Erweiterungsgrad $[\mathbb{L} : \mathbb{Q}]$.

Hausübungen

Aufgabe H19 (Normale Erweiterungen I)

- (a) Zeige, daß jede Körpererweiterung \mathbb{L}/\mathbb{K} mit $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 2$ normal ist.
- (b) Gibt es eine nicht normale Körpererweiterung \mathbb{L}/\mathbb{K} mit $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = 3$?

Aufgabe H20 (Normale Erweiterungen II) Betrachte die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt{2} + 2})/\mathbb{Q}$. Zeige oder widerlege, daß diese Erweiterung normal ist. Bestimme ggf. die kleinste normale Erweiterung \mathbb{L}/\mathbb{Q} mit $\mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt{2} + 2}) \subseteq \mathbb{L}$ und deren Erweiterungsgrad.

Wir wünschen Euch allen schöne erholsame Weihnachtstage und einen guten Start in ein neues Jahr.