Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 9. Dezember 2008

Algebra

9. Übung

Aufgabe 41 Es seien R, S Integritätsbereiche, $\mathbb{K}, \mathbb{L}$ Körper und $f : \mathbb{K} \to \mathbb{L}$ ein Körperhomomorphismus.

(a) Zeige, daß $\mathbb{K}$ und $\mathbb{L}$ dieselbe Charakteristik besitzen.

(b) Kann es einen Ringhomomorphismus $g : R \to S$ mit $g(1) = 1$ geben, wenn R und S unterschiedliche Charakteristik haben? Charakterisiere gegebenenfalls die möglichen Charakteristiken von R und S.

Aufgabe 42 Es sei $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine Körpererweiterung und Z_1, Z_2 zwei Zwischenkörper. Das *Kompositum* von Z_1 und Z_2 ist definiert als der kleinste Zwischenkörper der Erweiterung, welcher Z_1 und Z_2 enthält und wird mit $Z_1 \cdot Z_2$ bezeichnet.

(a) Mache Dir klar, daß gilt
$$Z_1 \cdot Z_2 = Z_1(Z_2) = Z_2(Z_1).$$

(b) Zeige, daß, wenn die Erweiterungen $Z_1/\mathbb{K}$ und $Z_2/\mathbb{K}$ algebraisch sind, auch $Z_1 \cdot Z_2/\mathbb{K}$ algebraisch ist.

(c) Zeige, daß aus $[Z_1 : \mathbb{K}] = m$ und $[\mathbb{Z}_2 : \mathbb{K}] = n$ folgt, daß $[Z_1 \cdot \mathbb{Z}_2 : \mathbb{K}] \leq m \cdot n$ gilt. Gilt Gleichheit, wenn m und n teilerfremd sind?

(d) Es seien $u, v \in \mathbb{L}$ algebraisch über $\mathbb{K}$ mit Grad m bzw. n. Zeige, daß dann gilt
$$[\mathbb{K}(u, v) : \mathbb{K}] \leq m \cdot n.$$
Gilt Gleichheit, wenn m und n teilerfremd sind?

Aufgabe 43 Bestimme in folgenden Körpererweiterungen $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ für die angegebenen Elemente $a \in \mathbb{L}$ das Minimalpolynom.

(a) $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und $a = i$.

(b) $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a = i$.

(c) $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $a = \sqrt{7}$.

(d) $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und $a = \sqrt{7}$.

(e) $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und $a = \frac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$.

Aufgabe 44 Bestimme den Erweiterungsgrad folgender Erweiterungen

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt[17]{42})/\mathbb{Q}$,

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$,

(c) $\mathbb{Q}(i, \sqrt{3}, \eta)/\mathbb{Q}$, wobei η eine echte komplexe dritte Einheitswurzel sei.

Aufgabe 45 Sei $a = \sqrt[2]{3}$ und $b = \sqrt[3]{2}$. Bestimme $n := [\mathbb{Q}(a,b) : \mathbb{Q}]$ und ein Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ vom Grad $\leq n$, welches $a+b$ als Nullstelle hat.

Aufgabe 46 Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt *algebraische Zahl*, falls z algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist und *algebraische ganze Zahl* oder *ganzalgebraische Zahl*, wenn z Nullstelle eines normierten Polynoms aus $\mathbb{Z}[X]$ ist. Zeige:

(a) Falls x eine algebraische Zahl ist, dann existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, so daß $n \cdot x$ eine algebraische ganze Zahl ist.

(b) Ist $r \in \mathbb{Q}$ eine algebraische ganze Zahl, so folgt $r \in \mathbb{Z}$.

(c) Ist u eine algebraische ganze Zahl und $n \in \mathbb{Z}$, dann sind $u+n$ und $u \cdot n$ algebraische ganze Zahlen.

Nun wollen wir noch zeigen, daß die Menge aller algebraischen ganzen Zahlen einen Ring bildet.

(d) Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine abelsche Gruppe, welche von $\{b_1, ..., b_n\} \subseteq \mathbb{C}$ erzeugt werde, es gebe also für jedes $x \in M$ eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot b_i$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{Z}$. Zeige, daß eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ eine algebraische ganze Zahl ist, wenn für jedes Element $x \in M$ auch $z \cdot x$ ein Element aus M ist.

(e) Zeige, daß die Menge aller algebraischen ganzen Zahlen einen Ring bildet.

Hausübungen

Aufgabe H17 (Algebraische Elemente) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ eine Körpererweiterung.

(a) Zeige, daß der algebraische Abschluß von $\mathbb{K}$ abzählbar ist, wenn $\mathbb{K}$ abzählbar ist.

(b) Zeige, daß die über $\mathbb{K}$ algebraischen Elemente von $\mathbb{L}$ einen Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ bilden.

Hinweis: *Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist wieder eine abzählbare Menge.*

Aufgabe H18 (Kummer-Erweiterung) Es seien $p_1, ..., p_n \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedene Primzahlen. Zeige durch Induktion, daß der Bruch $\frac{x}{y}$ für jede teilerfremde Wahl $x, y \in \mathbb{N}$, so daß x kein Quadrat einer ganzen Zahl ist und keine der Primzahlen $p_1, ..., p_n$ eine der Zahlen x oder y in $\mathbb{N}$ teilt, keine Wurzel in $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, ..., \sqrt{p_n})$ besitzt. Folgere dabei für den Erweiterungsgrad

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, ..., \sqrt{p_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n$$

und gib eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, ..., \sqrt{p_n})$ an.
Welchen Grad hat also der kleinste Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$, welcher alle Quadratwurzeln natürlicher Zahlen enthält?
Hinweis: *Es kann im Induktionsschritt hilfreich sein, eine $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_{n-1}})$-Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, ..., \sqrt{p_n})$ zu ermitteln.*