Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 08/09 2. Dezember 2008

Algebra

8. Übung

Aufgabe 36

(a) Zeige, daß $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealring ist.

(b) Sei R ein Integritätsbereich und $c \in R$ irreduzibel. Zeige, daß $R[X]$ kein Hauptidealring ist.

(c) Zeige, daß für jeden Körper $\mathbb{K}$ der Polynomring in $n \in \mathbb{N}$ Unbestimmten $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ für $n > 1$ kein Hauptidealring ist.

Aufgabe 37 Bestimme alle irreduziblen Polynome

(a) in $\mathbb{C}[X]$.

(b) in $\mathbb{R}[X]$.

(c) in $\mathbb{Z}_2[X]$ bis Grad 4.

Aufgabe 38 Zeige mittels eines geeigneten Kriteriums, daß folgende Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel sind. Welche dieser Polynome sind auch in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel?

$$
\begin{aligned}
f_1(X) &= X^2 - 2X + 2, \\
f_2(X) &= 3X^2 - 9X - 27, \\
f_3(X) &= X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 3X + 9, \\
f_4(X) &= 5X^4 - 42X^3 - 42X + 42.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 39 Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige mit dem Kriterium von Eisenstein, daß im Polynomring in 2 Unbestimmten $\mathbb{K}[X, Y]$ das Polynom

$$f(X, Y) := Y^3 + X^2 \cdot Y^2 + X^3 \cdot Y + X$$

irreduzibel ist.
Hinweis: *Die Ringe* $\mathbb{K}[X, Y]$ *und* $(\mathbb{K}[X])[Y]$ *sind isomorph.*

Aufgabe 40 Sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper. Zeige, daß dann $|\mathbb{K}| = p^n$ für eine Primzahl p und ein $n \geq 1$ gilt.

Hausübungen

Aufgabe H15 (Automorphismen von Polynomringen) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $c \in \mathbb{K}$ ein beliebiges Element.

(a) Zeige, daß jeder Ringautomorphismus $\Phi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ irreduzible Polynome auf irreduzible Polynome abbildet.

(b) Zeige, daß die Abbildung

$$\Phi_c : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], \quad \Phi_c(f(X)) = \Phi_c\left(\sum_{k=0}^{\deg(f)} a_k \cdot X^k\right) := \sum_{k=0}^{\deg(f)} a_k \cdot (X-c)^k$$

ein Ringautomorphismus ist.

(c) Zeige, daß das Polynom

$$f(X) = \sum_{k=0}^{p-1} X^k = X^{p-1} + X^{p-2} + ... + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

für $p \in \mathbb{N}$ prim ein irreduzibles Polynom ist.
Hinweis: *In Teil (c) steht eine endliche geometrische Reihe.*

Aufgabe H16 (Die Grenzen des Reduktionsverfahrens) Wir wissen bereits, daß $f(X) = X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom ist. Als primitives Polynom ist es somit auch in $\mathbb{Z}[X]$ irreduzibel. Wir wollen zeigen, daß für jede Primzahl p das reduzierte Polynom $f(X) = X^4 + 1 \in \mathbb{Z}_p[X]$ nicht irreduzibel ist.
Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Zeige:

(a) Gibt es ein $a \in \mathbb{Z}_p[X]$ mit $a^2 = -1$, dann ist $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ nicht irreduzibel.

(b) Gibt es ein $b \in \mathbb{Z}_p[X]$ mit $b^2 = 2$, dann ist $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ nicht irreduzibel.

(c) Gibt es ein $c \in \mathbb{Z}_p[X]$ mit $c^2 = -2$, dann ist $f \in \mathbb{Z}_p[X]$ nicht irreduzibel.

(d) In $\mathbb{Z}_p$ ist mindestens eine der drei Zahlen $-2, -1, 2$ eine Quadratzahl.

Somit gibt es Polynome in $\mathbb{Z}[X]$, welche nicht mit dem Reduktionskriterium als irreduzibel erkannt werden können, obwohl sie irreduzibel sind.

Hinweis: *In den Teilen (a),(b) und (c) ist es möglich, f als Produkt zweier normierter Polynome vom Grad 2 zu schreiben.*