Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 08/09 25. November 2008

Algebra

7. Übung

Aufgabe 31 Sei R ein Integritätsbereich, $R[X]$ der Polynomring über R und $\iota_x : R[X] \to R$ die Punktauswertung in $x \in R$.

(a) Zeige, daß der Kern der Punktauswertung ι_x ein Primideal ist.

(b) Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind.

   (1) Der Ring $R[X]$ ist ein Hauptidealring.

   (2) Der Ring R ist ein Körper

Aufgabe 32 Betrachte den Polynomring $\mathbb{R}[X]$.

(a) Zeige, daß das Polynom $X^2 + 1$ in $\mathbb{R}[X]$ irreduzibel ist.

(b) Zeige, daß der Quotientenring $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ isomorph zu $\mathbb{C}$ ist, indem Du

   (i) die Restklassen des Quotientenringes analysierst,

   (ii) eine geeignete Auswertungsabbildung $\iota_\lambda : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ betrachtest.

Aufgabe 33 Sei $R = M_2(\mathbb{C})$ der Ring komplexer 2×2-Matrizen.

(a) Zeige, daß für jedes $A \in R$ im Polynomring $R[X]$ gilt:

$$(X - A) \cdot (X + A) = X^2 - A^2.$$

(b) Finde Matrizen A, B mit

$$(B - A) \cdot (B + A) \neq B^2 - A^2.$$

(c) Wo liegt der scheinbare Widerspruch?

Aufgabe 34 Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Zeige, daß dann f, aufgefaßt als komplexes Polynom, n verschiedene Nullstellen besitzt. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 35 Es sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper mit $q := |\mathbb{K}|$ Elementen.

(a) Mache Dir klar, daß
$$f(X) := \prod_{k \in \mathbb{K}} (X - k)$$
ein Polynom von Grad q mit führendem Koeffizienten 1 ist, welches jedes Körperelement als Nullstelle hat.

(b) Folgere aus einem geeigneten Satz der Gruppentheorie, daß es für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedene Primzahlen $p_1, ..., p_m$ und eine Zerlegung
$$\mathbb{K}^\times \cong G_{p_1} \oplus G_{p_2} \oplus ... \oplus G_{p_m}$$
gibt, so daß jeder direkte Summand G_{p_k} eine p_k-Gruppe ist.
Erinnerung: *Eine Gruppe G heißt p-Gruppe für eine Primzahl p, falls jedes Element $g \in G$ als Gruppenordnung eine Potenz von p besitzt.*

(c) Zeige, daß jede Untergruppe von $\mathbb{K}^\times$ zyklisch ist.
Hinweis: *Wie viele Nullstellen kann das Polynom $(X^d - 1)$ für $d \in \mathbb{N}$ höchstens haben?*

(d) Zeige, daß jedes $k \in \mathbb{K}$ Nullstelle des Polynoms
$$X^q - X$$
ist und folgere
$$f(X) = X^q - X.$$

Hausübungen

Aufgabe H13 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $f \in \mathbb{K}[X]$ und $\deg(f) > 1$.

(a) Zeige folgende Abschätzung:
$$\deg(f') \leq \deg(f) - 1.$$

(b) Wann gilt $\deg(f') = \deg(f) - 1$?

(c) Es gelte zusätzlich $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = p$ für p prim. Zeige, daß folgende Bedingungen äquivalent sind.

(1) Es gilt $f' = 0$.

(2) Es existiert ein $g \in \mathbb{K}[X]$ mit $f(X) = g(X^p)$.

Aufgabe H14

(a) Charakterisiere alle rationalen Zahlen, die als Nullstellen des Polynoms
$$f(X) = X^3 + \frac{5}{3}X^2 - 9X + 15$$
bzw. alle rationalen Zahlen, die als Nullstellen des Polynoms
$$g(X) = X^3 - \frac{17}{19}X^2 - 121X + \frac{2057}{19}$$
in Frage kommen.

(b) Finde alle rationalen Nullstellen des Polynoms
$$h(X) = X^7 - 2X^6 + X^5 - 2X^4 + X^3 - 2X^2 + X - 2.$$