Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 4. November 2008

Algebra

4. Übung

Aufgabe 18 Es sei R ein faktorieller Ring. Zeige, daß jedes irreduzible Element $x \in R$ ein Primelement ist.

Aufgabe 19 Bestimme in $\mathbb{Z}_8$ alle Einheiten, Primelemente und irreduziblen Elemente.

Aufgabe 20 Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Wir wollen zeigen, daß in R die Menge

$$\mathcal{N} := \{x \in R : x \text{ ist ein Nullteiler oder } x = 0\}$$

ein Primideal enthält.

(a) Sei $P \subseteq R$ ein Primideal. Zeige, daß die Menge

$$S := \{x \in R : x \notin P\} = P^C$$

multiplikativ abgeschlossen ist, also

$$a \in S, b \in S \Rightarrow a \cdot b \in S.$$

(b) Sei umgekehrt $S \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen und es sei $P \subseteq R$ ein Ideal mit $P \subseteq S^C$, welches maximal ist unter allen Idealen im Komplement von S, dann ist P ein Primideal.

(c) Zeige, daß in R die Menge aller Nicht-Nullteiler S multiplikativ abgeschlossen ist und daß die Menge S^C ein Ideal von R enthält.

(d) Zeige nun die Behauptung.

Aufgabe 21 Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ eine Teilmenge. Die Menge S heißt *gesättigt*, falls aus $x \in S$ und $x = a \cdot b$ folgt, daß $a \in S$ und $b \in S$ gilt. Enthält eine gesättigte Teilmenge eines Rings ein Element, dann auch jeden Teiler des Elementes.
Wir verschärfen das Resultat aus Aufgabe 20 (b). Zeige, daß folgende Aussagen für einen kommutativen Ring äquivalent sind:

(1) Die Menge $S \subseteq R$ ist eine gesättigte und multiplikativ abgeschlossene Teilmenge.

(2) Die Menge S^C ist die Vereinigung von Primidealen in R.

Hinweis: Zeige, daß unter der Vorraussetzung aus (1) mit $x \in S^C$ auch $(x) \subseteq S^C$ gilt.

Aufgabe 22

(a) Zeige, daß für einen kommutativen Ring R mit Eins folgende Aussagen äquivalent sind.

   (1) Ist $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq ...$ eine aufsteigende Kette von Idealen in R, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $I_n = I_{n_0}$ für alle $n > n_0$.

   (2) In jeder nicht leeren Teilmenge von Idealen in R gibt es bezüglich der Inklusionsordnung ein maximales Element.

   (3) Jedes Ideal I in R ist endlich erzeugbar, es gibt also $a_1, ..., a_n \in R$ mit $I = (a_1, ..., a_n)$.

   Wir sagen auch, eine Kette mit der Eigenschaft in (1) wird *stationär* und nennen einen kommutativen Ring mit Eins, der obige Eigenschaften hat, *noethersch*.
   Einen nicht kommutativen Ring nennen wir *noethersch*, wenn jedes Linksideal endlich erzeugbar ist.

(b) Zeige, daß jeder kommutative Hauptidealring ein noetherscher Ring ist.

(c) Finde ein Beispiel für einen nicht noetherschen kommutativen Ring R mit Eins. Gib ein Ideal in R an, welches nicht endlich erzeugbar ist.

Hausübungen

Aufgabe H7 Es sei a ein ganzzahliger Parameter. Gibt es eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$, so daß $b-1$ durch 3 teilbar, $b-3$ durch 4 teilbar und $b-a$ durch 5 teilbar ist? Wenn ja, bestimme für $a = 2$ und $a = 4$ die kleinste positive ganze Zahl mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe H8 Es sei R ein faktorieller Ring und $a, b, c, d, x \in R$.

(a) Sind a und b teilerfremd, so gilt $a|bc \Rightarrow a|c$.

(b) Ist $d \neq 0$, so gibt es nur endlich viele Hauptideale (x) in R mit $(d) \subseteq (x)$.