Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 28. Oktober 2008

Algebra

3. Übung

Aufgabe 13 In dieser Aufgabe wollen wir folgende Aussage beweisen:
Sei R ein kommutativer Ring, I ein Ideal in R und $P_1, ..., P_n$ Primideale in R, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $I \subseteq P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_n$.

(2) $I \subseteq P_j$ *für ein* $1 \leq j \leq n$.

Bevor wir diese Aussage beweisen, bereiten wir erst einige Hilfsmittel vor.

(a) Beweise folgenden Hilfssatz: Ist R ein kommutativer Ring, $P \subseteq R$ ein Primideal und sind $a_1, ..., a_n$ Elemente aus R, dann folgt aus $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \in P$ bereits, daß für ein $1 \leq m \leq n$ das Element a_m schon in P liegt.

(b) Beweise die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) für den Fall $n = 2$.

Nimm nun an, die Behauptung sei für alle $n_0 < n$ wahr, (1) sei wahr und (2) sei falsch.

(c) Zeige, daß die Menge

$$I_j := I \cap P_j \cap \left(\bigcup_{i \neq j} P_i \right)^C$$

nicht leer ist.

(d) Finde nun ein Element in I, was nicht in $\bigcup_{i=1}^n P_i$ liegen kann. Beweise damit die Aussage.

Aufgabe 14 Sei R ein Ring und I ein Ideal in R. Zeige, daß es eine Bijektion zwischen der Menge

$$\mathcal{J} := \{J \subseteq R, \text{ J ist Ideal in } R, I \subseteq J\}$$

und der Menge aller Ideale in R/I via

$$J \to J/I$$

gibt. Somit ist jedes Ideal in R/I von der Form J/I.

Aufgabe 15 Zeige, daß für ein Ideal $(0) \neq I \subseteq \mathbb{Z}$ folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) Das Ideal I ist ein maximales Ideal.

(2) Das Ideal I ist ein Primideal.

(3) Das Ideal I ist das von einer Primzahl erzeugte Hauptideal.

Aufgabe 16 Wir konstuieren ein Gegenbeispiel zu **H6**.
Betrachte $S = 2 \cdot \mathbb{Z}$, den Ring der geraden Zahlen, und den durch $R := S \times S$ definierten Produktring.

(a) Zeige, daß die Abbildung

$$\varphi : R \to \mathbb{Z}_4, \quad \varphi((x, y)) := x + y$$

ein Ringhomomorphismus ist. Bestimme weiter den Kern von φ.

(b) Zeige, daß $\ker(\varphi)$ nicht von der Form $I \times J$ für Ideale I, J in S sein kann.

Aufgabe 17 Es sei R ein Integritätsbereich und Hauptidealring. Zeige, daß folgende Aussagen für ein Ideal $I \subseteq R$, $I \neq (0)$, äquivalent sind:

(a) Das Ideal I ist ein Primideal.

(b) Das Ideal I ist ein maximales Ideal.

Hausübungen

Aufgabe H5 (Unterringe und Quotienten der ganzen Zahlen)

(a) Bestimme für eine positive Zahl $m \in \mathbb{N}$ alle maximalen Ideale und alle Primideale des Rings $\mathbb{Z}_m$.

(b) Finde ein maximales Ideal I in $2 \cdot \mathbb{Z}$, dem Ring der geraden Zahlen, so daß $2 \cdot \mathbb{Z}/I$ kein Körper ist.

Aufgabe H6 (Ideale in Produkten) Es seien $R_1, ..., R_n$ Ringe mit Eins und I ein Ideal in $R := R_1 \times R_2 \times ... \times R_n$. Zeige, daß es Ideale $I_1 \subseteq R_1, I_2 \subseteq R_2, ..., I_n \subseteq R_n$ gibt mit

$$I \cong I_1 \times I_2 \times ... \times I_n.$$

Warum ist das kein Widerspruch zu Aufgabe 16?