Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 08/09 21. Oktober 2008

Algebra

2. Übung

Aufgabe 7 Es sei R ein Ring. Zeige, daß das Zentrum $Z(R)$ ein Unterring von R ist. Ist das Zentrum ein Ideal in R?

Aufgabe 8 Seien R, S Ringe mit Eins und $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

(a) Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Es gilt $\varphi(1) = 1$.

(2) Für jede Einheit $u \in R$ ist $\varphi(u)$ eine Einheit in S.

(3) Es gibt eine Einheit $u \in R$, so daß $\varphi(u)$ eine Einheit in S ist.

(b) Erfüllt φ eine (und damit alle) Bedingungen aus (a), dann gilt $\varphi(u^{-1}) = \varphi(u)^{-1}$ für jede Einheit $u \in R$.

(c) Ist φ ein surjektiver Ringhomomorphismus, so gilt $\varphi(1) = 1$.

(d) Finde ein Beispiel von Ringen R, S mit Eins mit Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$, so daß $\varphi(1) \neq 1$.

(e*) Was kannst Du allgemein über das Element $\varphi(1)$ aussagen? (Hier solltest Du nicht länger als 5 Minuten Zeit investieren...)

(f) Finde ein Beispiel von Ringen R, S mit Eins mit Ringhomomorphismus, welcher ein nicht invertierbares Element auf eine Einheit abbildet.

Aufgabe 9 Es sei R ein Ring und $a \in R$, dann ist

(a) die Menge $I := \{x \in R : xa = 0\}$ ein Linksideal und

(b) die Menge $J := \{x \in R : ax = 0\}$ ein Rechtsideal.

Aufgabe 10 Seien R und S Ringe und $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Weiter sei I ein Ideal in R, J ein Ideal in S und $K := \ker(\varphi)$.

(a) Zeige, daß $\varphi^{-1}(J) \subseteq R$ ein Unterring von R ist, welcher K enthält. Ist $\varphi^{-1}(J)$ ein Ideal in R?

(b) Zeige, daß $\varphi(I) \subseteq S$ kein Ideal zu sein braucht. Ist $\varphi(I)$ ein Ideal in S, wenn φ injektiv ist? Ist $\varphi(I)$ ein Ideal in S, wenn φ surjektiv ist?

(c) Ist $K \subseteq I$, φ surjektiv und I ein Primideal in R, dann ist $\varphi(I)$ ein Primideal in S.

Aufgabe 11 Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, R ein Divisionsring und $n > 1$ eine natürliche Zahl.

(a) Zeige, daß das Zentrum von $M_2(\mathbb{K})$ genau aus den Vielfachen der Einheitsmatrix besteht.

(b) Zeige, daß Zentrum von $M_n(\mathbb{K})$ besteht ebenfalls nur aus skalaren Vielfachen der Einheitsmatrix.

(c) Was kannst Du über das Zentrum von $M_n(R)$ sagen?

(d) Zeige, daß $M_n(R)$ keine echten Ideale besitzt.

(e) Folgere, daß $P := (0)$ ein Primideal in $M_n(R)$ ist.

(f) Zeige, daß nicht gilt
$$a \cdot b \in P \Rightarrow a \in P \text{ oder } b \in P.$$

(g) Gibt es echte Links- oder Rechtsideale in $M_n(R)$?

Aufgabe 12 (Ringe stetiger Funktionen) Für eine kompakte Teilmenge[1] der reellen Zahlen $\Omega \subseteq R$ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(\Omega)$ die stetigen Funktionen auf Ω mit Werten in $\mathbb{C}$. Es seien Ω_1 und Ω_2 zwei Kompakta in $\mathbb{R}$ und es sei $R := \mathcal{C}(\Omega_1)$ und $S := \mathcal{C}(\Omega_2)$. Weiter sei $\varphi : \Omega_2 \to \Omega_1$ eine stetige Abbildung.

(a) Was sind die Einheiten von R?

(b) Zeige, daß R und S bzgl. komponentenweiser Addition und Multiplikation kommutative Ringe mit Eins sind, und daß über die Vorschrift
$$R \ni f \to f \circ \varphi \in S$$
ein einserhaltender Ringhomomorphismus $\varphi_* : R \to S$ definiert ist. Beachte hierbei die umgekehrte Reihenfolge der beteiligten Objekte.

(c) Zeige, daß die Identität $\mathrm{id} : \Omega_1 \to \Omega_1$ die Identität auf R induziert.

(d) Zeige, daß der Ringhomomorphismus φ_* injektiv ist, wenn φ surjektiv ist.

(e) Charakterisiere die Ideale von R, welche als Kerne von Homomorphismen obiger Form auftreten.

(f) Welche unter den Idealen aus (d) sind Primideale von R?

Die folgenden Teilaufgaben sind nicht für eine Algebra Prüfung prüfungsrelevant.

Falls Du Dich für Funktionalanalysis interessierst, könntest Du folgende Verträglichkeiten von Topologie und Algebra interessant finden:

(g*) Zeige, daß R mit der Supremumsnorm einen Banachraum bildet und daß die Multiplikation in beiden Variablen gleichzeitig stetig ist. Solche Objekte heißen *Banachalgebren.*

(h*) Zeige, daß die Abbildung $R \ni f \to f^* \in R$, wobei $f^*(x) := \overline{f}(x)$, eine stetige Involution auf R ist. Somit ist R nicht nur eine Banachalgebra, sondern sogar eine *Banach***-Algebra.*

(i*) Zeige, daß die C*-Eigenschaft gilt, also $\|f\|_\infty^2 = \|f^* f\|_\infty$ für alle $f \in R$ erfüllt ist. Eine Banach*-Algebra, welche diese Eigenschaft erfüllt, heißt *C***-Algebra.*

(j*) Zeige, daß der Kern von φ sogar ein abgeschlossenes Ideal bildet, welches unter der Involution invariant ist.

(k**) Es gibt in den stetigen beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}$ Ideale, die nicht aus Funktionen bestehen, die an einer Stelle eine Nullstelle haben müssen. Hier spüren wir, daß die Kompaktheit als Vorraussetzung starke Auswirkungen hat.

[1] Alle Aussagen bleiben wahr, wenn man beliebige kompakte Hausdorffräume betrachtet.

Aufgabe 13 In dieser Aufgabe wollen wir folgende Aussage beweisen:
Sei R ein kommutativer Ring, I ein Ideal in R und $P_1, ..., P_n$ Primideale in R, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $I \subseteq P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_n$.

(2) $I \subseteq P_j$ *für ein* $1 \leq j \leq n$.

Bevor wir diese Aussage beweisen, bereiten wir erst einige Hilfsmittel vor.

(a) Beweise folgenden Hilfssatz: Ist R ein kommutativer Ring, $P \subseteq R$ ein Primideal und sind $a_1, ..., a_n$ Elemente aus R, dann folgt aus $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \in P$ bereits, daß für ein $1 \leq m \leq n$ das Element a_m schon in P liegt.

(b) Beweise die Implikation (1) $\Rightarrow$ (2) für den Fall $n = 2$.

Nimm nun an, die Behauptung sei für alle $n_0 < n$ wahr, (1) sei wahr und (2) sei falsch.

(c) Zeige, daß die Menge
$$I_j := I \cap P_j \cap \left(\bigcup_{i \neq j} P_i \right)^C$$
nicht leer ist.

(d) Finde nun ein Element in I, was nicht in $\bigcup_{i=1}^n P_i$ liegen kann. Beweise damit die Aussage.

Hausübungen

Aufgabe H3 (Beispiele für Ideale) Es sei R ein kommutativer Ring und $J \subseteq R$ ein Ideal in R.

(a) Zeige, daß die Menge $N := \{x \in R : x \text{ ist nilpotent in } R\}$ ein Unterring von R ist. Ist N auch ein Ideal in R?

(b) Zeige, daß die Menge

$$\mathrm{Rad}J := \{x \in R : \text{ Es gibt eine natürliche Zahl } n \in \mathbb{N} - \{0\}, \text{ mit } x^n \in J\}$$

ein Ideal in R bildet. Dieses heißt das *Radikal von* J.

Aufgabe H4 (Beispiele für Hauptidealringe)

(a) Zeige, daß $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist.
Hinweis: *Es kann nützlich sein, Division mit Rest anzuwenden.*

(b) Zeige: Das Bild eines Hauptidealrings unter einem Ringhomomorphismus ist wieder ein Hauptidealring

(c) Folgere: Für jede natürliche Zahl m mit $m > 1$ ist der Quotientenring $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/(m \cdot \mathbb{Z})$ ein Hauptidealring.