Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Nils Scheithauer
Walter Reußwig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 08/09 14. Oktober 2008

Algebra

1. Übung

Aufgabe 1 Es seien R, S Ringe und $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Der Ringhomomorphismus φ ist injektiv.

(2) Der Ringhomomorphismus φ besitzt trivialen Kern.

Aufgabe 2 Es sei A eine abelsche Gruppe. Zeige, daß die Menge $\mathrm{End}(A)$ der Endomorphismen von A mit punktweiser Addition und Verknüpfung als Multiplikation einen Ring bildet. Ist dieser Ring kommutativ? Besitzt $\mathrm{End}(A)$ eine Eins?

Aufgabe 3 Es sei R ein Ring. Zeige, daß unter sehr schwachen Vorraussetzungen an R die $n \times n$-Matrizen mit R-Einträgen $M_n(R)$ für $n > 1$ einen nicht kommutativen Ring bilden.

Aufgabe 4 Es sei R ein Ring. Ein Element $a \in R$ heißt *nilpotent*, falls es eine natürliche Zahl n gibt mit $a^n = 0$. Zeige: Sind a und b nilpotente Elemente eines kommutativen Rings R, dann ist auch $(a + b)$ nilpotent.
Ist obige Aussage auch wahr, wenn wir auf die Vorraussetzung, daß R kommutativ ist, verzichten?

Aufgabe 5 Es sei R ein Ring und es seien $f, g : \mathbb{Q} \to R$ zwei Ringhomomorphismen. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Q}$ gilt $f(n) = g(n)$.

(2) Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt $f(x) = g(x)$.

Aufgabe 6 (Quaternionen) Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{H} := \{\lambda := \lambda_0 \cdot \mathbb{1} + \lambda_1 \cdot i + \lambda_2 \cdot j + \lambda_3 \cdot k : \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\},$$

als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\{\mathbb{1}, i, j, k\}$ und folgender Multiplikation:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \mu &= (\lambda_0 \cdot \mathbb{1} + \lambda_1 \cdot i + \lambda_2 \cdot j + \lambda_3 \cdot k) \cdot (\mu_0 \cdot \mathbb{1} + \mu_1 \cdot i + \mu_2 \cdot j + \mu_3 \cdot k) \\ &:= (\lambda_0\mu_0 - \lambda_1\mu_1 - \lambda_2\mu_2 - \lambda_3\mu_3) \cdot \mathbb{1} + (\lambda_0\mu_1 + \lambda_1\mu_0 + \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2) \cdot i \\ &+ (\lambda_0\mu_2 + \lambda_2\mu_0 + \lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3) \cdot j + (\lambda_0\mu_3 + \lambda_3\mu_0 + \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) \cdot k. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, daß $(\mathbb{H}, +, \cdot)$[1] ein Ring ist, welcherer *Ring der Quaternionen* heißt.

(a) Mache Dir klar, daß $(\mathbb{H}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

[1]Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865), irischer Mathematiker und Physiker) konstruierte 1843 obige Verallgemeinerung der komplexen Zahlen auf einen 4-dimensionalen reellen Raum. Ihm zu Ehren werden die Quaternionen mit $\mathbb{H}$ bezeichnet.

(b) Zeige, daß folgende $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\pi : \mathbb{H} \to M_2(\mathbb{C})$, welche wie folgt auf der Basis von $\mathbb{H}$ definiert ist, injektiv ist, wobei wir $M_2(\mathbb{C})$ als reellen Vektorraum auffassen.

$$E := \pi(\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I := \pi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$J := \pi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K := \pi(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Zeige, daß π multiplikativ ist.

(d) Zeige, daß die $\mathbb{R}$-lineare Hülle Q von $\{E, I, J, K\}$ einen Unterring von $M_2(\mathbb{C})$ bildet.

(e) Folgere nun, daß $\mathbb{H}$ ein Ring (und damit eine $\mathbb{R}$-Algebra) mit Eins ist. Ist $\mathbb{H}$ kommutativ? Bildet π die Eins von $\mathbb{H}$ auf die Eins von Q ab?

(f) Zeige die Relationen

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = -ji, \quad jk = -kj, \quad ki = -ik.$$

Mit formaler Multiplikation, wird der $\mathbb{R}$-Vektorraum, der durch die Basis $\{\mathbb{1}, i, j, k\}$ erzeugt wird, mit obigen Relationen ebenfalls zum Ring der Quaternionen, wenn wir verlangen, daß $\mathbb{1}$ mit allen anderen Elementen kommutiert, vgl. z. B. [Jantzen, Algebra] p. 300ff.

(g) Zeige, daß jedes Element von $\mathbb{H} - \{0\}$ invertierbar ist. Überlege, wie das Inverse zu einem Quaternion aussieht.

(h) Überlege, warum Du in dieser Aufgabe gezeigt hast, daß es eine Gruppenstruktur auf der Einheitskugel des $(\mathbb{R}^4, \|\cdot\|_2)$ gibt.

Hausübungen

Aufgabe H1 (Frobenius-Homomorphismus) Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und R ein kommutativer Ring mit Eins und Charakteristik p.

(a) Zeige die Aussage aus der Vorlesung: Für $a, b \in R$ mit $ab = ba$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}.$$

(b) Folgere, daß die Abbildung

$$\varphi : R \to R, \quad \varphi(x) := x^p$$

ein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe H2 Es sei R ein endlicher Ring mit Eins, wobei $1 \neq 0$ gelte. Zeige, das folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Der Ring R ist ein Divisionsring.

(2) Es gibt in R keine Nullteiler.