Einführung in die Optimierung
14. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Madeline Lips

WS 2012/13
14./15.02.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Lokale Minima)
Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathscr{X}} \quad f(x)$$

mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Überprüfen Sie jeweils, ob der Punkt x^*
(i) sicher kein lokaler Minimalpunkt ist,
(ii) eventuell ein lokaler Minimalpunkt sein könnte.

(a) $\mathscr{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (1,1)^T$

(b) $\mathscr{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1, x_2 \geq 2\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (1,0)^T$

(c) $\mathscr{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (0,0)^T$

Aufgabe G2 (Slater-Bedingung)
Gegeben sei das konvexe Optimierungsproblem

$$\min f(x) \ \text{ s.t. } \ c(x) \leq 0,$$

mit konvexen, zumindest einmal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Die sogenannte Slater-Bedingung lautet: Es gibt einen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$, mit $c(y) < 0$.
Zeigen Sie, dass aus der Slater-Bedingung die Constraint Qualification folgt, d.h. für alle $x \in \mathscr{X}$ gilt $\mathscr{T}(x) = \mathscr{L}_{\mathscr{X}}(x)$.

Aufgabe G3 (Strategie der aktiven Mengen)
Betrachten Sie das quadratische Problem

$$\begin{array}{lrcl} \min & \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 & \leq & 2, \\ & -x_1 - x_2 & \leq & -1, \\ & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

Lösen Sie dieses Problem mit der Strategie der aktiven Menge, wobei als Startpunkt $x^0 = (1,1)$ verwendet werden soll. Skizzieren Sie die zulässige Menge und zeichnen Sie die Iterationspunkte x^k ein.

Aufgabe G4 (Modellierung)
Formulieren Sie ein quadratisches Optimierungsproblem im $\mathbb{R}^n$, das 2^n verschiedene lokale Minima besitzt.