Einführung in die Optimierung
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Madeline Lips

WS 2012/13
07./08.02.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Tangentialkegel)
Sei

$$\begin{aligned}\mathscr{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\, & -2x + y - 1 \leq 0,\\ & -2x - y - 1 \leq 0,\\ & x + y - 1 \leq 0\\ & x - y - 1 \leq 0\}.\end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die Menge $\mathscr{X}$.

(b) Bestimmen Sie die Tangentialkegel von $\mathscr{X}$ in den Punkten $p_1 = (-\frac{1}{2}, 0)$, $p_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $p_3 = (0,0)$ und zeichnen Sie die Tangentialkegel von $\mathscr{X}$ in p_1 und p_2 in die Skizze ein.

(c) Bestimmen Sie anhand der Skizze alle lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f : \mathscr{X} \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Aufgabe G2 (Tangentialkegel)
Seien $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2 \subset R^n$ abgeschlossen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $x \in \mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2$ und bezeichne $\mathscr{Z}_1$ und $\mathscr{Z}_2$ den Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1$ bzw. $\mathscr{X}_2$ in x. Dann ist der Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2$ in x die Menge $\mathscr{Z}_1 \cap \mathscr{Z}_2$.

(b) Sei $x \in \mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2$ und bezeichne $\mathscr{Z}_1$ und $\mathscr{Z}_2$ den Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1$ bzw. $\mathscr{X}_2$ in x. Dann ist der Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2$ in x die Menge $\mathscr{Z}_1 \cup \mathscr{Z}_2$. (Für den Fall, dass $x \notin \mathscr{X}$ gilt, sei der Tangentialkegel von $\mathscr{X}$ in x als die leere Menge definiert.)

Aufgabe G3 (Notwendige Optimalitätsbedingungen)
Formulieren Sie analog zum Satz 7.3 aus der Vorlesung die notwendige Optimalitätsbedingung für den Fall, dass

(a) es sich um ein Maximierungsproblem handelt,

(b) die lokale Lösung $\bar{x}$ ein innerer Punkt von $\mathscr{X}$ ist.

Aufgabe G4 (KKT-Bedingungen)
Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$(P1)\quad \begin{array}{lll} \max & 5x_1 + 8x_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 & \leq \; 8 \\ & -x_1 + 2x_2 & \leq \; 4 \\ & x_1, x_2 & \geq \; 0 \end{array}$$

Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für (P1). Verifizieren Sie für jeden Eckpunkt (algebraisch und geometrisch), ob die KKT-Bedingungen gelten. Was ist die globale Lösung?