Einführung in die Optimierung
5. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Madeline Lips

WS 2013/13
22./23.11.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Optimallösungen)
Betrachten Sie das lineare Optimierungsproblem $\max\{c^T x \mid x \in \mathscr{P}(A,b)\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Vektoren $c \in \mathbb{R}^2$ hat das lineare Problem

(a) genau eine Optimallösung,
(b) unendlich viele Optimallösungen,
(c) keine Optimallösung?

Geben Sie eine Ungleichung $a^T x \leq \alpha$ (mit $a \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$) an, sodass das lineare Problem

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, a^T x \leq \alpha\}$$

für jedes $c \in \mathbb{R}^2$ mindestens eine Optimallösung hat.

Aufgabe G2 (Farkas-Lemma)
Beweisen Sie: Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Dann hat genau eines der beiden folgenden Systeme eine Lösung:

$$Ax \leq b \qquad \dot{\bigvee} \qquad \begin{array}{rcl} y^T A & = & 0 \\ y & \geq & 0 \\ y^T b & < & 0. \end{array}$$

Aufgabe G3 (Transformation & Modellierung)

(a) Lässt sich das folgende Optimierungsproblem als LP formulieren? Wenn ja, geben Sie eine solche Formulierung an. Wenn nicht, begründen Sie dies.

$$\begin{array}{lrcl} \min & \max\{x_1, x_2, x_3\} & & \\ \text{s.t.} & \dfrac{x_3 - x_4 - 2}{x_1 + x_2 + 1} & \leq & 4 \\ & |x_1 + x_2 + x_4| & \leq & 9 \\ & |x_2 + x_3 + x_4| & \leq & 9 \\ & \max\{x_1, x_4\} & \leq & \min\{x_2, x_3\} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Aus zwei Steinbrüchen S_1 und S_2 mit den Vorräten (in Tonnen) $s_1 = 4, s_2 = 23$ ist Schotter auf insgesamt drei Baustellen B_1, B_2, B_3 zu transportieren. Die Bedarfsmeldungen sind $b_1 = 12, b_2 = 5, b_3 = 6$. Die Transportkosten (pro Tonne) sind wie folgt aufgeschlüsselt:

	B_1	B_2	B_3
S_1	12	5	13
S_2	11	16	17

(a) Geben Sie ein Modell zur Bestimmung eines Transportplans mit minimalen Kosten an.
(b) Bestimmen Sie das zugehörige Dualproblem.

Hausübung

Aufgabe H1 (Unbeschränktheit & Zulässige Richtungen)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Seien $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Ist ein lineares Programm der Form $\max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ unbeschränkt, dann gibt es einen Index k, sodass das Problem $\max\{c_k x_k \mid Ax = b, x \geq 0\}$ unbeschränkt ist.

Gilt die Umkehrung dieser Aussage? (D.h. ist das LP $\max\{c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ beschränkt, dann ist auch $\max\{c_k^T x_k \mid Ax = b, x \geq 0\}$ für alle k beschränkt.) Beweisen oder widerlegen Sie.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie den folgenden Satz:
$\bar{x}$ ist genau dann Optimallösung von

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, wenn gilt:

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= b \\ \bar{x} &\geq 0 \\ c^T s \leq 0 \ \forall s \in \mathscr{Z}(\bar{x}) &:= \{s : As = 0, s_{\{1,\dots,n\} \setminus \operatorname{supp}(\bar{x})} \geq 0\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Aufgabe H2 (Farkas-Lemma)

(a) Seien A, b, I dimensionsverträglich.
Zeigen Sie, dass folgende Bedingung äquivalent zum Farkas Lemma (Satz 4.5) ist.

$$P\left(\begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq \emptyset \quad \dot{\bigvee} \quad P\left(\begin{pmatrix} -A^T \\ b^T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \neq \emptyset.$$

Geben Sie jeweils analog eine polyedrische Formulierung ($P(\hat{A}, \hat{b}) \neq \emptyset \quad \dot{\bigvee} \quad P(\tilde{A}, \tilde{b}) \neq \emptyset$) der folgenden Versionen des Farkas Lemmas an:

i. es existiert ein $x \geq 0$ mit $Ax \leq b$ $\quad \dot{\bigvee} \quad$ es existiert ein $y \geq 0$ mit $y^T A \geq 0^T$, $y^T b < 0$

ii. es existiert ein x mit $Ax = b$ $\quad \dot{\bigvee} \quad$ es existiert ein y mit $y^T A = 0^T$, $y^T b < 0$

iii. es existiert ein x mit $Ax \leq b$ $\quad \dot{\bigvee} \quad$ es existiert ein $y \geq 0$ mit $y^T A = 0^T$, $y^T b < 0$

(b) Beweisen Sie: Für dimensionsverträgliche Matrizen A, B, C und D sowie Vektoren a, b, u und v hat genau eines der beiden folgenden Systeme eine Lösung:

$$\begin{array}{rcrcl} Ax & + & By & \leq & a \\ Cx & + & Dy & = & b \\ x & & & \geq & 0 \end{array} \qquad \dot{\bigvee} \qquad \begin{array}{rcrcl} u^T A & + & v^T C & \geq & 0 \\ u^T B & + & v^T D & = & 0 \\ u & & & \geq & 0 \\ u^T a & + & v^T b & < & 0. \end{array}$$

Aufgabe H3 (Transformation & Modellierung)

(a) In praktischen Anwendungen sind Problemdaten oft nicht exakt bekannt, sondern nur mit einer gewissen Fehlertoleranz. Betrachten wir dies am Beispiel der Nebenbedingungsmatrix A eines linearen Problems: Für die Komponenten von A seien obere und untere Schranken bekannt, d.h. es sind B und V gegeben, sodass

$$A \in \mathscr{A} = \left\{A \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid B_{ij} - V_{ij} \leq A_{ij} \leq B_{ij} + V_{ij} \text{ für alle } i = 1, \dots, m \text{ und } j = 1, \dots, n\right\}.$$

Es soll nun eine Optimallösung gefunden werden, die für jede Nebenbedingungsmatrix $A \in \mathscr{A}$ zulässig ist, d.h. es wird das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \quad \text{für alle } A \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

betrachtet.
Formulieren Sie dies als lineares Programm.

(b) In einem Unternehmen mit Kuppelproduktion werden aus den Rohstoffen R_i, $i = 1, 2, 3$, die Zwischenprodukte Z_j, $j = 1, 2$ hergestellt und daraus die Fertigprodukte P_k, $k = 1, 2$ angefertigt. Die Fertigungsstruktur ist in nachstehenden Inputmatrizen beschrieben (zur Herstellung einer ME von P_1 werden 0 ME von Z_1, 1 ME von Z_2 und 2 ME von Z_3 benötigt; analog sind die übrigen Matrixeinträge zu interpretieren). Die Verkaufspreise für die Fertigprodukte, die Einkaufspreise für die Rohstoffe sowie die Mengenbegrenzungen für die Rohstoffe (in dem betrachteten Planungszeitraum von einem Monat) sind in folgender Tabelle angegeben:

Produkt	Ein- bzw. Verkaufspreis (GE/ME)	Maximale Einkaufsmenge (ME)
P_1	38	–
P_2	71	–
R_1	3	50
R_2	1	55
R_3	2	35

	Z_1	Z_2	Z_3
P_1	0	1	2
P_2	3	1	1

	R_1	R_2	R_3
Z_1	1	6	2
Z_2	4	0	2
Z_3	2	1	2

Welche Mengen von P_1 und P_2 sollen in dem genannten Planungszeitraum hergestellt werden, damit die Summe der Deckungsbeiträge maximiert wird?

i. Formulieren Sie ein mathematisches Modell

ii. Geben Sie das duale Problem an.