Funktionalanalysis
14. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
07./08. Februar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G59 (Separierende Teilräume von E')
Sei $(E, \|\cdot\|)$ normiert und $F' \subseteq E'$ ein linearer Teilraum. Zeigen Sie: F' ist separierend für E genau dann, wenn F' σ^*-dicht in E' ist.
Hinweis: Umgeben Sie einen Punkt im Komplement des σ^*- Abschlusses von F' mit einer geeigneten konvexen Menge und wenden Sie Satz 11.6 der Vorlesung an.

Aufgabe G60 (Extremalpunkte)
(a) Bestimmen Sie die Extremalpunkte
  (i) der Einheitskugel von $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$.
  (ii) der Einheitskugel von $(L^1([0,1],\lambda), \|\cdot\|_1)$ (λ das Lebesguemaß auf $[0,1]$).
  (iii) der Einheitskugel von $(L^\infty([0,1],\lambda), \|\cdot\|_\infty)$.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a): Die Räume $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ und $(L^1([0,1],\lambda), \|\cdot\|_1)$ besitzen keinen Prädual. (Ein normierter Raum F heißt Prädual eines Banachraumes E, falls F' isometrisch isomorph ist zu E.)

(c) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{P} := \{f \in (L^\infty([0,1],\lambda), \|\cdot\|_\infty) \ : \ \|f\|_\infty \leq 1,\ f \geq 0\}$ $\sigma(L^\infty, L^1)$-kompakt und konvex ist. Bestimmen Sie die Extremalpunkte von $\mathcal{P}$.

Aufgabe G61 (Schwache Operatortopologie)
Seien E und F normierte Räume. Zeigen Sie:

(a) Für $x \in E$ und $y' \in F'$ ist $\omega_{x,y'} : \mathscr{L}(E,F) \ni T \mapsto \langle Tx, y' \rangle \in \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional auf $(\mathscr{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathrm{Op}})$.

(b) Sei $G \subseteq \mathscr{L}(E,F)'$ die lineare Hülle dieser linearen Funktionale, dann ist G eine separierende Familie von linearen Funktionalen und $\sigma(\mathscr{L}(E,F), G)$ ist die schwache Operatortopologie (swop) auf $\mathscr{L}(E,F)$.

(c) Bestimmen Sie den Dual von $(\mathscr{L}(E,F), \mathrm{swop})$.

Bemerkungen:

1.) Die Linearform $\omega_{x,y'}$ kann man auch mit dem elementaren Tensor $x \otimes y'$ und G mit dem (algebraischen) Tensorprodukt $E \otimes F'$ identifizieren.

2.) In der statistischen Mechanik und in der Quantenfeldtheorie sind die Observable eines quantenmechanischen Systems durch eine *-Algebra von Operatoren auf einem Hilbertraum gegeben, die abgeschlossen ist in der schwachen Operatortopologie (äquivalenterweise in der starken Operatortopologie). Solche Operator-Algebren nennt man heute *von Neumann-Algebren*.

Aufgabe G62 (Schwacher Abschluss der Einheitssphäre)
Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie:
Die Einheitssphäre $S := \{x \in E \ : \ \|x\| = 1\}$ liegt $\sigma(E, E')$-dicht in der abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{E_1} := \{x \in E \ : \ \|x\| \leq 1\}$ genau dann, wenn E unendlich dimensional ist.
Hinweis: Nutzen Sie Hahn-Banach und Ihr Wissen aus Aufgabe G58 und zeigen Sie per Widerspruch, dass der schwache Abschluss von S eine Teilmenge von $\overline{E_1}$ ist. Ein Element x liegt im Abschluss von S, wenn jeder Schnitt einer Umgebung von x mit S nicht leer ist.

Hausübung

Aufgabe H38 (Reflexivität und schwache Topologien) (1 Punkt)
Sei $(E, ||\cdot||)$ ein normiert Raum. Zeigen Sie:

(a) $B := \{\hat{x} : x \in E, ||x|| \leq 1\}$ ist $\sigma(E'', E')$-dicht in der Einheitskugel von E''.
Hinweis: Wenden Sie 11.6 der Vorlesung geeignet an.

(b) Ist E ein Banachraum, dann sind folgene Aussagen äquivalent:
   (i) E ist reflexiv.
   (ii) E' ist reflexiv.
   (iii) Die Topologien $\sigma(E', E)$ und $\sigma(E', E'')$ stimmen überein.
   (iv) Die Einheitskugel $E_1 := \{x \in E \ : \ \|x\| \leq 1\}$ ist schwach kompakt.
   Hinweise: Die Einschränkung von $\sigma(E'', E')$ auf E stimmt mit $\sigma(E, E')$ überein. Zeigen Sie zunächst (iv) $\Rightarrow$ (i), dann können Sie diese Implikation nutzen um (iii) $\Rightarrow$ (ii) zu zeigen. Nutzen Sie Satz 11.8 der Vorlesung und Teil (a) um die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) zu zeigen.

Aufgabe H39 (Schwerpunkte von W'Maßen auf kompakten konvexen Mengen) (1 Punkt)
Sei K eine kompakte konvexe Menge nichtleere Teilmenge eines lokalkonvexen Vektorraumes $(E, \mathcal{P})$ und $A(K)$ die Menge der stetigen affinen Funktionen auf K. Zeigen Sie:

(a) $A(K)$, versehen mit der Supremumsnorm, ist ein Banachraum.

(b) Für $p \in K$ sei, wie üblich, $\delta_p : A(K) \ni f \mapsto f(p) \in \mathbb{K}$ (wir betrachten δ_p aber jetzt nur auf den affinen Funktionen!), dann ist $\hat{K} := \{\delta_p : p \in K\} \subseteq A(K)'$ konvex.

(c) $\hat{K} \subseteq A(K)'$ ist σ^*-kompakt.
Hinweis: Betrachten Sie z.B. die Abbildung $K \ni p \mapsto \delta_p \in A(K)'$.

(d) Sei $f' \in A(K)'$ mit $f'(\mathbb{1}) = 1 = ||f'||$, dann gibt es ein $p \in K$ mit $f' = \delta_p$.
Hinweis: Falls nicht, trennen Sie f' von $\hat{K}$ und führen dies mit $f' \geq 0$ zum Widerspruch.

(e) Sei μ ein (reguläres Borel-)Wahrscheinlichkeitsmaß auf K, dann existiert genau ein Punkt $p \in K$ mit $f(p) = \int_K f(p) d\mu(p)$ für alle $f \in A(K)$.

Bemerkungen:

1.) Zur Veranschaulichung betrachten Sie ruhig auch niederdimensionale konvexe Mengen K. Der Punkt p heißt auch der Schwerpunkt des Wahrscheinlichkeitsmaßes μ. Machen Sie sich klar, dass diese Bezeichnung sinnvoll ist.

2.) Natürlich gibt es viele Wahrscheinlichkeitsmaße mit demselben Schwerpunkt p. Ist ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß auf endlich vielen Punkten $q_1, \ldots, q_n$ konzentriert, so heißt das nur, dass man p als Konvexkombination der Punkte $q_1, \ldots, q_n$ schreiben kann.

3.) Die *Choquet-Theorie* versucht nun, solche Wahrscheinlichkeitsmaße zu konstruieren, die auf den Extremalpunkten von K konzentriert sind. Im wesentlichen geht das immer. Diese Theorie hat wiederum viele Anwendungen in der Mathematik und der mathematischen Physik – ob man nun Gruppendarstellungen in irreduzible Darstellungen zerlegt oder quantenmechanische Zustände in reine Zustände; auch Greensfunktionen kann man aus diesem Blickwinkel verstehen und vieles mehr.

4.) In der Quantenmechanik bilden die Zustände eine konvexe Menge (in Verallgemeinerung der konvexen Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße), ihre Extremalpunkte heißen *reine Zustände*. In den letzten Jahren besteht ein großer Teil der Probleme der Quanteninformationstheorie darin, für geeignete konvexe Mengen von Zuständen (meist auf zusammengesetzten Systemen) die Extremalpunkte zu bestimmen und zu entscheiden, ob ein vorgegebener Zustand in dieser Menge liegt oder nicht, oft durch Trennung mittels geeigneter linearer Funktionale bzw. Hyperebenen. Die meisten wichtigen Fragen sind aber noch ungelöst.