Funktionalanalysis
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
31. Jan. / 02. Feb. 2013

Gruppenübung

Aufgabe G55 (Offen impliziert absorbierend)
Sei $(E, \mathcal{P})$ ein lokalkonvexer Vektorraum. Zeigen Sie: Ist $U \subseteq E$ offen mit $0 \in U$, so ist U absorbierend.

Aufgabe G56 (Konvergenz der δ_n)
Sei, wie üblich, $\delta_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\delta_n(m) := \delta_{n,m}$. Dann liegt δ_n in jedem der Räume $c_0 := c_0(\mathbb{N})$, $\ell^1 := \ell^1(\mathbb{N})$, $\ell^p := \ell^p(\mathbb{N})$ $(1 < p < \infty)$, $\ell^\infty := \ell^\infty(\mathbb{N})$.
Untersuchen Sie die Konvergenz von $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\sigma(c_0, \ell^1)$, $\sigma(\ell^1, c_0)$, $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$, $\sigma(\ell^p, \ell^q)$, $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$, wenn Sie mutig sind, auch in $\sigma(\ell^\infty, (\ell^\infty)')$.

Aufgabe G57
Sei $\mathscr{F}$ die Menge der endlichen Folgen in $\ell^1 := \ell^1(\mathbb{N})$. Machen Sie sich klar, dass $(\mathscr{F}, ||\cdot||_1)' = \ell^\infty$ ist und zeigen Sie:

$$\sigma(\ell^\infty, \ell^1) \neq \sigma(\ell^\infty, \mathscr{F})$$

Geben Sie dazu eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^\infty$ an, die in $\sigma(\ell^\infty, \mathscr{F})$, nicht aber in $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$ konvergiert. Warum kann es sich nur um eine unbeschränkte Folge handeln?

Aufgabe G58 (Schwache Topologie und Norm-Topologie)
Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

(a) Zeigen Sie, dass jede schwach konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ beschränkt ist.

(b) Weisen Sie nach, dass die schwache Topologie gröber ist als die Normtopologie.

(c) Zeigen Sie: Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein endlich dimensionaler Vektorraum, so ist die schwache Topologie gleich der Norm-Topologie.

(d) Zeigen Sie: Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein unendlich dimensionaler Raum, so ist die schwache Topologie ungleich der Normtopologie. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass jede Nullumgebung der schwachen Topologie lineare Teilräume enthält.

Hausübung

Aufgabe H35 (Initiale Topologie) (1 Punkt)
Sei X eine Menge, und für $i \in I$ sei $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ ein topologischer Raum, sowie $f_i : X \to Y_i$ eine Abbildung. $\mathcal{T}$ sei die initiale Topologie bezüglich $\{f_i : i \in I\}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in X, dann gilt

$$\mathcal{T}\text{-}\lim_{j\in J} x_j = x_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{für alle } i \in I \text{ ist } \mathcal{T}_i\text{-}\lim_{j\in J} f_i(x_j) = f_i(x_0)\,.$$

(b) Die Funktion $f : (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T})$ ist genau dann stetig, wenn für alle $i \in I$ die Funktionen $f_i \circ f : (Y, \mathcal{S}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ stetig sind.

Aufgabe H36 (Produkttopologie) (1 Punkt)
Wir versehen $\mathbb{R}$ mit der gewohnten Topologie, d.h. $X \subseteq \mathbb{R}$ ist offen, falls für alle $x \in X$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $K_\varepsilon(x) = \left\{y \in \mathbb{R} : \left|x - y\right| < \varepsilon\right\} \subseteq X$.

(a) Betrachten Sie das kartesische Produkt $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ versehen mit der Produkttopologie. Skizzieren Sie offene Mengen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Umgebungsbasis von $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(b) Es sei W das kartesische Produkt $W = [0, 1]^{\mathbb{R}}$. Elemente in W können mit Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $[0, 1]$ identifiziert werden. Sei nun $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz in W mit $f_i : \mathbb{R} \to [0, 1]$.
Zeigen Sie: Das Netz $(f_i)_{i\in I}$ konvergiert in der Produkttopologie gegen eine Funktion f genau dann, wenn $(f_i)_{i\in I}$ punktweise gegen f konvergiert.

(c) Sei $\mathcal{E}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$, gerichtet durch Inklusion. Ferner sei für $E \subseteq \mathbb{R}$

$$\chi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: $(\chi_E)_{E\in\mathcal{E}}$ ist ein Netz in W mit $\lim_{E\in\mathcal{E}} \chi_E = \chi_{\mathbb{R}}$ in der Produkttopologie.

(d) Zeigen Sie: Es gibt keine Teilfolge von $(\chi_E)_{E\in\mathcal{E}}$, die gegen $\chi_{\mathbb{R}}$ konvergiert.

Aufgabe H37 (Adjungierte auf lokalkonvexen Vektorräumen) (1 Punkt)
Sei $(E, \mathcal{P})$ lokalkonvex, $E' := \{f' : E \to \mathbb{K} \text{ linear und stetig}\}$ der Dual von $(E, \mathcal{P})$. Zeigen Sie:

(a) Ein lineares Funktional $f' : (E, \mathcal{P}) \to \mathbb{K}$ ist stetig genau dann wenn es $\sigma(E, E')$-stetig ist.

(b) Ist $(F, \mathcal{P}')$ ein weiterer lokalkonvexer Vektorraum, und ist $T : E \to F$ $\sigma(E, E')$-$\sigma(F, F')$-stetig, dann existiert $T' : F' \to E'$ sodass $\langle Tx, f'\rangle = \langle x, T'f'\rangle$ für alle $f' \in F'$ und T' ist $\sigma(F', F)$-$\sigma(E', E)$-stetig.

(c) Sind E, F Banachräume und ist $T : E \to F$ $\sigma(E, E')$-$\sigma(F, F')$-stetig, dann ist T normstetig, also beschränkt.
Hinweis: Für den letzten Teil können Sie sich am Beweis von 10.13 der Vorlesung orientieren.