Funktionalanalysis
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
17./18. Januar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G45 (Beschränkte und unbeschränkte Operatoren)

(a) Sei $\mathscr{H}$ ein unendlich-dimesionaler Hilbertraum. Finden Sie einen unbeschränkten linearen Operator, der auf ganz $\mathscr{H}$ definiert ist.

(b) Es sei (a_{ij}), $i, j \in \mathbb{N}$, eine hermitesche Matrix, sodass der Operator A mit

$$(Af)(i) := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} f(j) \quad (i \in \mathbb{N})$$

jedes $f \in \ell^2(\mathbb{N})$ auf ein $Af \in \ell^2(\mathbb{N})$ abbildet. Zeigen Sie, dass A stetig ist.

Aufgabe G46 (Der Dual von $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist nicht isomorph zu $\ell^1(\mathbb{N})$: Ein anderer Beweis)
Sei $c(\mathbb{N}) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existiert}\}$ der Raum aller konvergenten Folgen.

(a) Zeigen Sie: Es existiert eine lineares Funktional $\varphi : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ mit $\varphi((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c(\mathbb{N})$.

(b) Zeigen Sie, dass keine Folge $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ existiert, so dass $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} s_n t_n$ ist, für alle $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

Aufgabe G47 (Ein lineares Funktional kann viele Fortsetzungen besitzen)
Sei $(E, \|\cdot\|) := (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_1)$, $M := \{\binom{z}{0} : z \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}^2$ und $f : M \ni \binom{z}{0} \mapsto z \in \mathbb{C}$. Dann ist f ein lineares Funktional auf M mit $\| f \| = 1$.
Bestimmen Sie alle Fortsetzungen $F : E \to \mathbb{C}$ von f mit $\| F \| = 1$.

Aufgabe G48 (Dualität von L^p und L^q für beliebige Maßräume)
Sei $1 \leq p < \infty$ und sei q konjugiert zu p. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\left(L^p(\mu)\right)'$ für σ-endliche Maßräume (Ω, Σ, μ) isometrisch isomorph zu $L^q(\mu)$ ist. Für $p > 1$ ist dies auch für beliebige (nicht notwendig σ-endliche) Maße gültig.
Zeigen Sie, dass obige Aussage für $p = 1$ im Allgemeinen falsch ist, d.h. für beliebige Maße ν muss $\left(L^1(\nu)\right)'$ nicht isometrisch isomorph zu $L^\infty(\nu)$ sein.
Hinweis: Betrachten Sie auf $\Omega := [0, 1]$ die σ-Algebra aller Teilmengen, die selbst oder deren Komplemente höchstens abzählbar sind, das Zählmaß ν und das Funktional $\psi : L^1(\nu) \to \mathbb{C}$, $\psi(f) := \int_0^1 f(t)\, t \, \mathrm{d}\nu(t)$.

Aufgabe G49 (Nach unten beschränkte Operatoren)
Zeigen Sie: Seien E, F Banachräume. Für $A : E \to F$ stetig sind äquivalent:

(i) Es gibt eine Konstante $C > 0$ sodass $\|Ax\| \geq C\|x\|$ ist für alle $x \in E$.

(ii) A ist injektiv und das Bild $A(E) \subseteq F$ ist abgeschlossen.

Hausübung

Aufgabe H29 (Der Dual von c_0 und ℓ^p) (1 Punkt)

(a) Sei $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ der Raum aller Nullfolgen. Zeigen Sie, dass $\ell^1(\mathbb{N})$ isomorph zum Dual von $c_0(\mathbb{N})$ ist. Zeigen Sie hierfür, dass die Abbildung

$$i : \ell^1(\mathbb{N}) \to (c_0)' \, , \; (i(s))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n \quad \text{mit } s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}),\; t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$$

ein isometrischer Isomorphismus ist, wobei $(c_0)'$ den Dual von $c_0(\mathbb{N})$ bezeichnet.

(b) Zeigen Sie: Für $1 \leq p < \infty$ ist der Dual von $\ell^p(\mathbb{N})$ isomorph zu $\ell^q(\mathbb{N})$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und der Konvention $0 = \frac{1}{\infty}$.

Aufgabe H30 (Positive lineare Funktionale sind stetig) (1 Punkt)
Sei X ein lokal-kompakter Raum, $\mathcal{C}_0(X)$ die stetigen Funktionen, die im unendlichen verschwinden, d.h. für $f \in \mathcal{C}_0(X)$ ist $\left\{x \in X : \left|f(x)\right| \geq \varepsilon\right\}$ für jedes $\varepsilon > 0$ kompakt, und sei $\varphi : \left(\mathcal{C}_0(X), \|\cdot\|_\infty\right) \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional.

(a) Warum ist φ genau dann beschränkt, wenn φ auf den positiven Funktionen beschränkt ist?

(b) Zeigen Sie, dass φ stetig ist. (*Hinweis:* Nehmen Sie an, dass φ nicht stetig ist und betrachten Sie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} f_n$ für eine geeignete Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_0(X)$.)

Aufgabe H31 (Isometrische Einbettungen in die Dualräume von L^1 und L^∞) (1 Punkt)
Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ konjugiert und für $g \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$ sei

$$\varphi_g : L^p \to \mathbb{C} : f \mapsto \int f g \, .$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $L^1 \to (L^\infty)'$, $g \mapsto \varphi_g$ eine isometrische Einbettung ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $L^\infty \to (L^1)'$, $g \mapsto \varphi_g$ eine isometrische Einbettung ist, falls μ ein σ-endliches Maß ist.