Funktionalanalysis
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
20./21. Dezember 2012

Gruppenübung

Aufgabe G41 („Gegenbeispiel“ zu Banach-Steinhaus)
Finden Sie ein „Gegenbeispiel“ zum Satz von Banach-Steinhaus für den Fall, dass der Urbildraum kein Banachraum ist.

Aufgabe G42 (Komplementierbarer Teilraum)
Sei E ein Banachraum und $X \subseteq E$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Es existiert eine stetige lineare Abbildung $P : E \to E$ mit $P^2 = P$ und $P(E) = X$.

(b) Es gibt einen abgeschlossenen linearen Teilraum $Y \subseteq E$, so dass die Abbildung

$$X \oplus_{l^1} Y \ni (x, y) \to x + y \in E$$

ein Homöomorphismus ist (d.h., bijektiv und in beide Richtungen stetig).

(c) Es gibt einen abgeschlossenen linearen Teilraum $Y \subseteq E$ mit $X \cap Y = \{0\}$ und $X + Y = E$.

Aufgabe G43 (Satz von Szegö)
Um das Intergral $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ für eine stetige Funktion f angenähert zu berechnen, bedient man sich häufig Näherungsformeln der Gestalt

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n)} f(t_i^{(n)}),$$

wobei $t_0^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)} \in [0, 1]$ und $\alpha_0^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)} \in \mathbb{R}$ sind. Man fragt sich nun, ob $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert. Aufschluss darüber liefert der folgende Satz von Szegö.

Sei Q_n wie oben. Dann sind äquivalent:

(i) $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ *für alle* $f \in \mathcal{C}([0, 1])$.

(ii) $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen* $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ *für alle Polynome und* $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{i=0}^{n} |\alpha_i^{(n)}| < \infty$.

Beweisen Sie diesen Satz. (*Hinweis:* Was ist $||Q_n||$?)

Bemerkung: Für die Trapezregel gilt beispielsweise

$$Q_n(f) = \frac{1}{n}\left(\frac{f(t_0)}{2} + f(t_1) + \ldots + f(t_{n-1}) + \frac{f(t_n)}{2}\right)$$

mit $t_i = \frac{i}{n}$, $0 \leq i \leq n$. Man kann zeigen, dass $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert für alle $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, also insbesondere für Polynome und somit auch für alle stetigen Funktionen.

Aufgabe G44 (Banach Steinhaus)
Können Sie den Satz von Banach-Steinhaus auch auf Netze verallgemeinern? Wie muss er dann formuliert werden?

Hausübung

Aufgabe H26 (Ein Gegenbeispiel zu Fourierreihen) (1 Punkt)
Zeigen Sie: Es gibt eine stetige periodische Funktion $f \in \mathcal{C}_{period.}([-\pi,\pi])$, deren Fourierreihe nicht überall punktweise gegen f konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie die linearen Funktionale

$$\varphi_n : (\mathcal{C}_{period.}([-\pi,\pi]), ||\cdot||_\infty) \ni f \mapsto (P_n f)(0)\,,$$

wobei wie in der Vorlesung P_n die durch den Dirichletkern gegebene orthogonale Projektion auf den Raum der trigonometrischen Polynome bis zum Grad n sei. Was können Sie über die Normen der φ_n für $n \to \infty$ sagen?

Aufgabe H27 (Grenzwerte punktweise konvergenter Folgen stetiger Funktionen) (1 Punkt)
Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_m : X \to \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergieren.

Für $m,n \in \mathbb{N}$ sei $A_{m,n} := \left\{x \in X \;:\; \left|f_m(x) - f_{m+k}(x)\right| \leq \frac{1}{n} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $A_{m,n}$ abgeschlossen, $A_{m,n} \setminus \mathring{A}_{m,n}$ nirgends dicht ($\mathring{A}_{m,n}$ bezeichnet das Innere von $A_{m,n}$) und $X = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} A_{m,n}$.

(b) Zeigen Sie, dass für $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \mathring{A}_{m,n}$ gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}\; \exists m \in \mathbb{N}\; \exists r > 0\; \forall y \in K_r(x) : \left|f(y) - f_m(y)\right| \leq \frac{1}{n}\,.$$

Folgern Sie daraus mit einem $\frac{\varepsilon}{3}$-Argument, dass f stetig in $x \in X$ ist, d.h. $x \in A := \{x \in X \;:\; f \text{ stetig in } x\}$.

(c) Zeigen Sie, dass $X \setminus \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \mathring{A}_{m,n} \subseteq \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} (A_{m,n} \setminus \mathring{A}_{m,n})$ ist für $n \in \mathbb{N}$. Folgern Sie daraus, dass gilt:

$$X \setminus A \subseteq \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} (A_{m,n} \setminus \mathring{A}_{m,n})\,.$$

(d) Zeigen Sie, dass die Menge A der Punkte, in denen f stetig ist, dicht in X liegt.

Aufgabe H28 (Konvergenz auf einer ONB) (1 Punkt)
Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{E} := (e_i)_{i\in I}$ eine ONB von $\mathscr{H}$. Zeigen Sie, dass für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{H}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = 0$ für alle $y \in \mathscr{H}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, e\rangle = 0$ für alle $e \in \mathcal{E}$ und $\left\{\left\|x_n\right\| \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$ ist beschränkt.