Funktionalanalysis
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
13./14. Dezember 2012

Gruppenübung

Aufgabe G37 (Fouriertransformation)
Gegeben sei die 2π-periodische Funktion s mit

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & \text{für } x \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: Die (reelle) Fourierreihe $\tilde{s}$ von s ist

$$\tilde{s}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

(b) Gegeben sei die Funktion S mit $S(x) = \int_0^x s(t)\,\mathrm{d}t$. Weisen Sie mittels partieller Integration nach, dass man die Fourierreihe $\tilde{S}$ von S durch gliedweise Integration von $\tilde{s}$ erhält.

(c) Zeigen Sie mit Aufgabenteil (a) und (b):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Aufgabe G38 (Approximation konstanter Funktionen)

(a) Zeigen Sie, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $s_n(x) = \sqrt{2}\,\sin(nx)$ eine ONB von $\mathscr{H}_0 := L^2([0,\pi], \frac{\lambda}{\pi})$ ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:
- Setzen Sie jede Funktion $f_0 \in \mathscr{H}_0$ antisymmetrisch auf $[-\pi,\pi]$ zu einer Funktion $f \in \mathscr{H} := L^2([-\pi,\pi], \frac{\lambda}{2\pi})$ fort, d.h. $f(x) := -f_0(-x)$ für $x \in [-\pi, 0)$. Machen Sie sich klar, dass Sie so jede Funktion im Teilraum $\mathscr{H}_a \subseteq \mathscr{H}$ der antisymmetrischen Funktionen generieren können.
- Bestimmen Sie die Projektion P_a auf den abgeschlossenen Teilraum $\mathscr{H}_a$.
  Hinweis: Betrachten Sie den Operator $U_a : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, $Uf(x) := -f(-x)$ und nutzen Sie Ihr Wissen aus Aufgabe H15.
- Projizieren Sie eine Ihnen bekannte ONB von $\mathscr{H}$ auf $\mathscr{H}_a$.

(b) Stellen Sie die konstante Funktion $e \equiv 1$ als Reihe über die Funktionen s_n, $n \in \mathbb{N}$, dar.

Aufgabe G39 (Dirichlet- und Fejér-Kerne)
Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $e_k \in \mathscr{H} = L^2\left([-\pi,\pi], \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ mit $e_k(t) = e^{ikt}$. Dann ist durch $D_n := \sum_{k=-n}^{n} e_k$ bzw. $F_n := \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)e_k$ der n-te Dirichlet-Kern bzw. Fejér-Kern gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass für $x \notin 2\pi\,\mathbb{Z}$ gilt:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{2k+1}{2}x\right) = \sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right).$$

Hinweis: Wie lassen sich $\sin\left(\frac{a}{2}\right)$ und $\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$ mit Hilfe von Exponentialfunktionen ausdrücken?

(c) Zeigen Sie, dass sich der Fejér-Kern auch wie folgt darstellen lässt:

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2, & \text{für } x \notin 2\pi\,\mathbb{Z}, \\ n+1, & \text{für } x \in 2\pi\,\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Hinweis: Nutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte geschlossene Form des Dirichlet-Kerns.

Aufgabe G40 (Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation)
Für $f \in L^1([-\pi,\pi])$ und $n \in \mathbb{Z}$ sei $\hat{f}(n)$ gegeben durch

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

Zeigen Sie: Für $f, g \in L^1([-\pi,\pi])$ ist $\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n) \cdot \hat{g}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Hausübung

Aufgabe H24 (Poisson-Kern und Dirichlet-Problem) (1 Punkt)

Für $0 \leq r < 1$ definiert man den Poisson-Kern

$$P_r(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} .$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $z = re^{it}$, dann gilt

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} = \Re \frac{1+z}{1-z} .$$

(b) Setzt man $P_n(t) := P_r(t)$ für $r := 1 - \frac{1}{n}$, dann ist $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine approximierende Eins, d.h.

(i) $P_n(t) \geq 0$,

(ii) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$,

(iii) Für jedes $0 < \delta < \pi$ konvergiert die Einschränkung von $P_n(t)$ auf das Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ gleichmäßig gegen Null, für $n \to \infty$.

Also konvergiert $(f * P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $[0, 2\pi]$ gleichmäßig gegen f für $f \in \mathcal{C}_{\text{period.}}([0, 2\pi])$.

(c) Sei f stetig (und reell) auf dem Einheitskreis $\mathbb{T}$ in der komplexen Ebene, und sei $\tilde{f}$ auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ definiert durch $\tilde{f}(e^{it}) := f(e^{it})$ und $\tilde{f}(re^{it}) := (P_r * f)(t)$ für $0 \leq r < 1$, dann ist $\tilde{f}$ stetig auf $\mathbb{D}$, und im Inneren ist $\Delta \tilde{f} = 0$, dass heißt, $\tilde{f}$ löst das Dirichletproblem für die Randverteilung f.

Hinweis: 1.) Bei der Definition der Faltung wird der Einheitskreis mit dem Intervall $[0, 2\pi)$ identifiziert. 2.) Der Übergang zu Polarkoordinaten kann viel Arbeit sparen (wie lautet Δ in Polarkoordinaten?).

(d) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\mathbb{D} \subset U$. Ferner sei f eine holomorphe Funktion auf U. Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel, dass für alle $z = re^{it}$, $0 \leq r < 1$, gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(t - s) f(e^{is})\,\mathrm{d}s .$$

Hinweis: 1.) Entwickeln Sie den Nenner des Integranden der Cauchyschen Integralformel in eine Potenzreihe. 2.) Zeigen Sie: $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{is}) e^{ins}\,\mathrm{d}s = 0$ für $n = 1, 2, \ldots$

Aufgabe H25 (Bairescher Kategoriensatz) (1 Punkt)

Sei X ein unendlich dimensionaler normierter Raum und sei $Y \subset X$ ein endlich dimensionaler Teilraum von X.

(a) Zeigen Sie, dass Y abgeschlossen in X ist und keinen inneren Punkt enthält.

(b) Sei X der lineare Raum aller Folgen mit nur endlich vielen Gliedern ungleich 0.
Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|)$ kein vollständiger Raum ist.

(c) Sei $\mathcal{P}([0, 1])$ der Vektorraum aller Polynome auf $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass es auf $\mathcal{P}([0, 1])$ keine Norm geben kann, die diesen Raum zu einem Banachraum macht.