Funktionalanalysis
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
06./07. Dezember 2012

Gruppenübung

Aufgabe G32
Sei $\mathcal{P}_2 \subseteq \mathscr{H} := L^2([-1,1])$ der lineare Teilraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich zwei.

(a) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion P auf $\mathcal{P}_2$.

(b) Sei $f_1, f_2 \in \mathscr{H}$ mit $f_1(x) = x^3$ und $f_2(x) = \sin(x)$ für $x \in [-1,1]$. Berechnen Sie Pf_i, $i = 1,2$.

Aufgabe G33 (Separabilität)
Wie in der Vorlesung heißt ein Banachraum *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

(a) Sei $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass $\ell^p(\mathbb{N})$ separabel ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\ell^\infty(\mathbb{N})$ nicht separabel ist.
Hinweis: Finden Sie eine überabzählbare Teilmenge in der Einheitskugel, deren Elemente voneinander große Abstände haben.

(c) Zeigen Sie: Ist E Banachraum und $H \subseteq E$ ein abgeschlossener Teilraum, dann ist E genau dann separabel, wenn E/H und H separabel sind.

(d) Zeigen Sie, dass der Quotient $\ell^\infty(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$ nicht separabel ist.

Aufgabe G34 (Basis von $\ell^2(\mathbb{N})$)
Zeigen Sie: Jede Basis (nicht Orthonormalbasis) eines unendlich-dimensionalen separablen Hilbertraumes ist überabzählbar.
Hinweis: Zeigen Sie: Existiert eine abzählbare Basis, so existiert auch eine abzählbare Basis, die gleichzeitig ein Orthonormalsystem ist.

Aufgabe G35 (Hilbertraum der fastperiodischen Funktionen)
Sei $\mathcal{F}$ die lineare Hülle der Funktionen $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{i\omega x}$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie:

$$\langle f, g \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

definiert ein Skalarprodukt auf $\mathcal{F}$, dass heißt, $\mathcal{F}$ ist ein Prä-Hilbertraum.

(b) Sei $\mathscr{H}$ die Vervollständigung von $\mathcal{F}$. ($\mathscr{H}$ heißt *Hilbertraum der fastperiodischen Funktionen*.)
Finden Sie eine ONB für $\mathscr{H}$ und berechnen Sie seine Dimension, indem Sie einen Isomorphismus zu einem geeigneten $\ell^2(I)$ angeben (I =Indexmenge). Ist $\mathscr{H}$ separabel?

Bemerkung: Man kann $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, wobei $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ für die gleichmäßig beschränkten stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ steht, auch in der Supremumsnorm abschließen. Dann erhält man die sogenannten *fastperiodischen Funktionen*. Sie wurden von Harald Bohr, dem Bruder des Physikers und Nobelpreisträgers Nils Bohr, in die Mathematik eingeführt.

Aufgabe G36 (Faltung)

(a) Zeigen Sie: Für Funktionen $f, g \in L^1\left([0,2\pi], \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ gilt die Ungleichung (λ=Lebesgue-Maß)

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

(b) Zeigen Sie, dass $f * g$ stetig ist für $f, g \in L^2\left([0,2\pi], \frac{\lambda}{2\pi}\right)$.
Hinweis: Wir sieht die Fouriertransformierte von $f * g$ aus?

Hausübung

Aufgabe H22 (Konkrete Orthonormalbasen: Rademacher- und Walsh-Funktionen) (1 Punkt)
Gegeben seien die Abbildungen

$$\Phi : [0,1) \to [0,1),\, x \mapsto 2x \bmod 1 \quad \text{und} \quad f : [0,1) \to \mathbb{R},\, f(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq y < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq y < 1. \end{cases}$$

Sei $f_n : [0,1) \to \mathbb{R},\, f_n(x) := (f \circ \Phi^n)(x)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Wie sehen die Funktionen f_n aus? Finden Sie eine explizite Darstellung für diese Funktionen und skizzieren Sie sie (*Rademacher-Funktionen*).

(b) Zeigen sie, dass $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem in $L^2([0,1))$ ist.

(c) Ergänzen $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ zu einer ONB von $L^2([0,1))$.
Hinweis: Welche Funktionen lassen sich durch Produkte aus den ersten n Rademacher-Funktionen gewinnen?
Die Funktionen der ONB, die Sie wahrscheinlich konstruiert haben, heißen auch *Walsh-Funktionen*.

Aufgabe H23 (Hardyraum) (1 Punkt)
Sei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe der komplexen Ebene und $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ der Vektorraum der auf $\mathbb{D}$ holomorphen Funktionen.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $0 < r < 1$ ist $\|f\|_r := \left(\int_0^{2\pi} |f(r \cdot e^{it})|^2 \, \mathrm{d}t\right)^{1/2}$ eine Norm auf $\mathscr{H}(\mathbb{D})$, die diesen Raum zu einem Prä-Hilbertraum macht.
Hinweis: Verwenden Sie den Identitätssatz für holomorphe Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $0 < r < 1$ die Funktionen $\{z \mapsto z^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ total in diesem Prä-Hilbertraum sind.

(c) Berechnen Sie aus (b) eine ONB für diesen Prä-Hilbertraum.

(d) Berechnen Sie $\|f\|_r$ für $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$.

(e) Zeigen Sie: Für $0 < r < r' < 1$ ist $\|f\|_r \leq \|f\|_{r'}$.

(f) Sei $\mathscr{H}_2(\mathbb{D}) := \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}) : \|f\|_2 := \sup_{0<r<1} \|f\|_r < \infty\}$.
Weisen Sie nach, dass f mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ genau dann ein Element von $\mathscr{H}_2(\mathbb{D})$ ist, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ ist. Zeigen Sie ferner, dass $\mathscr{H}_2(\mathbb{D})$ ein Hilbertraum ist.

(g) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\delta_{z_0} : \mathscr{H}_2(\mathbb{D}) \to \mathbb{C},\, f \mapsto f(z_0)$ für jedes $z_0 \in D$ ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathscr{H}_2(\mathbb{D})$ ist. Nach dem Satz von Riesz-Fréchet existiert daher ein $g \in \mathscr{H}_2(\mathbb{D})$ mit $\delta_{z_0}(f) = \langle f, g \rangle_{\mathscr{H}_2(\mathbb{D})}$ für alle $f \in \mathscr{H}_2(\mathbb{D})$. Bestimmen Sie g.