Funktionalanalysis
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
29./30. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G27 (Gleichheit von Hilbertraum-Vektoren)
Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und $x, y \in \mathscr{H}$ mit $\|x\| = 1 = \|y\|$. Zeigen Sie, dass aus $\langle x, y\rangle = 1$ folgt, dass $x = y$ ist.

Aufgabe G28 (Adjungierte)

Sei $S : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ der Rechtsshift, d.h., $(Sf)(n) := \begin{cases} 0, & \text{für } n = 0, \\ f(n-1), & \text{für } n \geq 1. \end{cases}$

Berechnen Sie S^*. Ist S unitär?

Aufgabe G29 (Positiv ist nicht gleich positiv)
Finden Sie Beispiele von Matrizen A und B, so dass A nicht-negative Einträge hat, A aber trotzdem nicht positiv semidefinit ist, während B positiv semidefinit ist, aber trotzdem auch negative Einträge hat.

Aufgabe G30 (Algebraische Charakterisierung von Operatoren 1)
Seien $\mathscr{H}, \mathscr{K}$ komplexe Hilberträume, $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ und $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$. Zeigen Sie:

(a) T ist *positiv (semidefinit)*, falls ein $R \in \mathscr{B}(\mathscr{H}, \mathscr{K})$ mit $T = R^*R$ existiert.

(b) T ist genau dann *hermitesch* (bzw. *selbst-adjungiert*), wenn $T = T^*$ gilt.

(c) T ist genau dann *normal*, wenn $T^*T = TT^*$ gilt.

(d) Ist T normal und injektiv, dann ist das Bild $\operatorname{ran} T$ dicht in $\mathscr{H}$.

(e) S ist genau dann eine *Isometrie*, wenn $S^*S = \mathbb{1}_{\mathscr{H}}$ gilt.

(f) S ist genau dann eine *Koisometrie*, wenn $SS^* = \mathbb{1}_{\mathscr{K}}$ gilt.

(g) S ist genau dann *unitär*, wenn $S^* = S^{-1}$ gilt (d.h. $S^*S = \mathbb{1}_{\mathscr{H}}$ und $SS^* = \mathbb{1}_{\mathscr{K}}$).

Aufgabe G31 (C*-Algebra der stetigen Funktionen)
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ kompakt.

(a) Machen Sie sich kurz klar, dass $(\mathcal{C}(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ mit der punktweisen Multiplikation eine C*-Algebra ist.

(b) Wie sehen orthogonale Projektionen, positive Elemente, selbst-adjungierte Elemente, normale Elemente, Isometrien, Koisometrien, unitäre Elemente und partielle Isometrien in $(\mathcal{C}(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ aus? Hierbei seien diese Klassen von Elementen definiert wie in der algebraischen Charakterisierung der entsprechenden Operatoren auf einem Hilbertraum (vgl. Aufgaben G30 und H19).

(c) Wie muss Ω beschaffen sein, damit $\Omega \ni t \mapsto 1$ und $\Omega \ni t \mapsto 0$ nicht die einzigen orthogonalen Projektionen sind?

Hausübung

Aufgabe H19 (Algebraische Charakterisierung von Operatoren 2) (1 Punkt)

Seien $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ komplexe Hilberträume, $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ und $S \in \mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$. Zeigen Sie:

(a) T ist genau dann eine *orthogonale Projektion*, wenn $T^2 = T = T^*$ gilt.

(b) S ist genau dann eine *partielle Isometrie*, wenn S^*S eine orthogonale Projektion ist.

(c) Ist S eine partielle Isometrie, dann ist auch S^* eine partielle Isometrie.

Hinweis: Warum ist das Bild $\operatorname{ran} S$ von S ein abgeschlossener Teilraum von $\mathscr{K}$?

Bemerkung: Man nennt S^*S *initiale Projektion* und SS^* *finale Projektion* für S. Entsprechend heißt $S^*S\mathscr{H}$ *initialer Teilraum* und $SS^*\mathscr{K}$ *finaler Teilraum* für S.

Aufgabe H20 (Netzkonvergenz) (1 Punkt)

Sei J eine beliebige Menge, $(x_j)_{j\in J} \subseteq \mathbb{C}$, so dass $\sum_{j\in J} x_j$ konvergiert. Zeigen Sie

(a) Die Menge $J_0 := \{j \in J : x_j \neq 0\} \subseteq J$ ist höchstens abzählbar.

Hinweis: Für wie viele $j \in J$ kann $|x_j| > \varepsilon > 0$ sein?

(b) Ist $J = \mathbb{N}$, so ist $\sum_{j\in J} x_j$ genau dann konvergent im Sinn von 6.2, wenn $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_j$ absolut konvergiert.

Aufgabe H21 (Polardarstellung) (1 Punkt)

Seien $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ Hilberträume.

(a) Zeigen Sie: Für $A \in \mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$ existiert eine (eindeutige) partielle Isometrie $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$, so dass

$$A = V|A| \quad \text{und} \quad \ker A = \ker V \text{ ist,}$$

wobei $|A| := (A^*A)^{1/2}$ die Wurzel des positiven Elements $A^*A \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ ist, d.h. $|A|^2 = A^*A$.

(Für unendlich-dimensionale Hilerträume können Sie die Existenz von $|A|$ annehmen; wie sehen Sie die Existenz im endlich-dimensionalen Fall?)

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathscr{H}$ ist $\| \, |A|x \, \|_{\mathscr{H}} = \|Ax\|_{\mathscr{K}}$.

(ii) Sei $|A|\mathscr{H} := \{|A|x \; : \; x \in \mathscr{H}\} \subseteq \mathscr{H}$. Betrachten Sie die Abbildung $V_0 : |A|\mathscr{H} \to \mathscr{K}$, $|A|x \mapsto Ax$. Zeigen Sie, dass V_0 eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

(iii) „Ergänzen“ Sie V_0 zu einer partiellen Isometrie $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H},\mathscr{K})$.

(iv) Zeigen Sie: V ist die gewünschte partielle Isometrie (sie ist auch durch die obigen Bedingungen eindeutig festgelegt).

(b) Weisen Sie nach, dass $V^*A = |A|$ ist.

(c) Aus einem Numerik Buch:

Zu jeder (reellen) $m \times n$-Matrix A existieren orthogonale Matrizen U und V, so dass

$$U^tAV = diag(s_1, s_2, \dots) = S.$$

Die sogenannten singulären Werte $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_l > s_{l+1} = s_{l+2} = \dots = 0$ sind die Wurzeln der Eigenwerte von A^tA, l ist der Rang der Matrix A und die Spalten von U bzw. V sind Eigenvektoren von AA^t bzw. A^tA.

Was hat diese „Singulärwertzerlegung“ mit der Polardarstellung zu tun?