Funktionalanalysis
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
22./23. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G22 (Schwache Ableitungen)
Sei $\mathcal{D} := \{f \in \mathcal{C}^\infty([-1,1]) : f(-1) = 0 = f(1)\} \subseteq L^2([-1,1])$.

(a) Sind die Funktionen $f_1, f_2 \in L^2([-1,1])$ mit $f_1(x) := |x|$ und $f_2 := \chi_{[0,1]}$ schwach differenzierbar, d.h. existiert $g_i \in L^2([-1,1])$, so dass $-\langle f_i, \varphi' \rangle = \langle g_i, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt? Bestimmen Sie ggf. die schwache Ableitung von f_i.

(b) Zeigen Sie, dass für $f \in L^2([-1,1])$ äquivalent sind:

(i) f ist schwach differenzierbar,

(ii) f ist das unbestimmte Integral einer Funktion $g \in L^2([-1,1])$, d.h. für fast alle $x \in [-1,1]$ gilt:

$$f(x) = f(-1) + \int_{-1}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Aufgabe G23 (Lax-Milgram 1)
Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum, $(F, \|\cdot\|_F)$ ein normierter Raum und $A : E \to F$ eine stetige lineare Abbildung. Ferner gebe es eine Konstante $c > 0$, sodass $\|Ax\|_F \geq c\|x\|_E$ ist für alle $x \in E$. Zeigen Sie, dass A injektiv ist und dass das Bild $\operatorname{ran} A$ von A abgeschlossen ist.

Aufgabe G24 (Lax-Milgram 2)
Sei $\mathscr{H}$ Hilbertraum, $B : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ eine beschränkte koerzitive Sesquilinearform und $\varphi : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional. Zeigen Sie: Es existiert $z \in \mathscr{H}$ mit $\varphi(x) = \overline{B(z,x)}$ für alle $x \in \mathscr{H}$.

Aufgabe G25 (Rang-1-Operatoren)

(a) Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum, $x, y \in \mathscr{H}$ und $T_{x,y}$ der Operator $\mathscr{H} \ni z \mapsto \langle z, y \rangle x \in \mathscr{H}$. Berechnen Sie die Adjungierte dieses Operators.

(b) Für welche Wahlen von $x, y \in \mathscr{H}$ ist $T_{x,y}$ positiv, hermitesch, eine orthogonale Projektion, eine partielle Isometrie?

(c) (i) Sei $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ mit $\dim(\operatorname{ran} T) = 1$. Zeigen Sie: Es existieren $x, y \in \mathscr{H}$ mit $T = T_{x,y}$.

(ii) Sei nun $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ mit $\dim(\operatorname{ran} T) < \infty$. Zeigen Sie, dass $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n \in \mathscr{H}$ existieren mit $T = \sum_{i=1}^n T_{x_i, y_i}$.

Anmerkung: $T_{x,y}$ bezeichnet man auch als *Rang-1-Operator*. In der Quantenmechanik schreibt man dafür oft $|x\rangle\langle y|$.

Aufgabe G26 (Adjungierte)
Sei $\mathscr{H} = L^2([0,1])$, $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ stetig und

$$T_K : \mathscr{H} \to \mathscr{H}, \ \ (T_K f)(x) := \int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Zeigen Sie: Ist $K^*(x,y) := \overline{K(y,x)}$, dann ist $(T_K)^* = T_{K^*}$.

Hausübung

Aufgabe H16 (Ein ziemlich singuläres Maß) (1 Punkt)
Auf dem Intervall $[0,1]$ sei λ das Lebesgue-Maß und $C \subseteq [0,1]$ sei die Cantor-Menge. Zur Erinnerung: Es gilt $\lambda(C) = 0$ und $C = [0,1] \setminus S$ mit

$$S := \left]\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right[\cup \left]\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}\right[\cup \left]\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}\right[\cup \left]\tfrac{1}{27}, \tfrac{2}{27}\right[\cup \left]\tfrac{7}{27}, \tfrac{8}{27}\right[\cup \left]\tfrac{19}{27}, \tfrac{20}{27}\right[\ \ldots$$

(a) Sei eine Funktion τ auf S definiert durch
$\tau(x) = \frac{1}{2}$ für $x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$, $\tau(x) = \frac{1}{4}$ für $x \in \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[$, $\tau(x) = \frac{3}{4}$ für $x \in \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[$,
$\tau(x) = \frac{1}{8}$ für $x \in \left]\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right[$, $\tau(x) = \frac{3}{8}$ für $x \in \left]\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right[$, $\tau(x) = \frac{5}{8}$ für $x \in \left]\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right[$,
$\tau(x) = \frac{7}{8}$ für $x \in \left]\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right[$, $\tau(x) = \frac{1}{16}$ für $x \in \left]\frac{1}{81}, \frac{2}{81}\right[$, etc.
Machen Sie sich klar: τ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer stetigen (Verteilungs-) Funktion τ auf $[0,1]$ (Sie brauchen den Beweis nicht im einzelnen ausarbeiten). τ ist auf S differenzierbar und hat dort die Ableitung 0.

(b) Zeigen Sie: Das zu τ gehörige Maß μ_τ ist singulär bezüglich λ.
Zur Erinnerung: Das Maß μ_τ ist auf der Borel-σ-Algebra von $[0,1]$ definiert durch

$$\mu_\tau([a,b]) = \mu_\tau(]a,b[) = \tau(b) - \tau(a)\,.$$

(c) Zusatz: Zeigen Sie, dass C überabzählbar ist.
Hinweis: Charakterisieren Sie die Punkte $x \in C$ durch ihre triadische Entwicklung.

Aufgabe H17 (Ausgleichsrechnung) (1 Punkt)
Seien $\mathscr{H}$, $\mathscr{K}$ Hilberträume, $A : \mathscr{H} \to \mathscr{K}$ eine beschränkte lineare Abbildung mit abgeschlossenem Bild, und sei $b \in \mathscr{K}$ ein vorgegebener Vektor. Zeigen Sie, dass für $x \in \mathscr{H}$ äquivalent sind:

(a) Für alle $z \in \mathscr{H}$ ist $\|Ax - b\| \leq \|Az - b\|$.

(b) Es ist $A^*Ax = A^*b$.

Warum existiert ein solches $x \in \mathscr{H}$, wann ist es eindeutig?

Aufgabe H18 (Riesz-Fréchet) (1 Punkt)
Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Für jedes $f \in \mathcal{C}([0,1])$ sei Φ_f die Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) + ay(t) = f(t)\,, \qquad y(0) = 0\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_2) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 \Phi_f(t)\,\mathrm{d}t$ ein stetiges lineares Funktional ist.

(b) Bestimmen Sie eine Funktion $g \in L^2([0,1])$, so dass $\varphi(f) = \langle f, g\rangle$ ist.