Funktionalanalysis
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
15./16. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G18 (Approximation durch Polynome)
Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen a, b, c gibt, so dass

$$\int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 \, dx$$

minimal wird, dass heißt, unter allen Polynomen vom Grad ≤ 2 existiert ein eindeutiges Polynom, welches das Polynom p mit $p(x) = x^3$ im obigen Sinn am besten approximiert. Berechnen Sie die Zahlen a, b, c.

Aufgabe G19 (Satz von Hahn-Banach in Hilberträumen)
Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum, M ein linearer Teilraum von $\mathscr{H}$ und $\varphi : M \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional auf M.

(a) Zeigen Sie: Es existiert ein lineares Funktional $\overline{\varphi} : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$, das φ fortsetzt, d.h. $\overline{\varphi}|_M = \varphi$.

(b) Weisen Sie nach, dass es genau eine Fortsetzung $\overline{\varphi}$ gibt mit $\|\overline{\varphi}\| = \|\varphi\|$.
(Die Eindeutigkeit ist in vielen Banachräumen falsch!)

(c) Gelten obige Aussagen auch, wenn $\mathscr{H}$ ein Prä-Hilbertraum ist?

Aufgabe G20 (Geometrische Charakterisierung von Elementen kleinsten Abstands)
Sei $M \subseteq \mathscr{H}$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge eines Hilbertraums $\mathscr{H}$ und sei $x \in \mathscr{H}$. Zeigen Sie, dass für $z \in M$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\|x - z\| = \inf_{y \in M} \left\|x - y\right\|$,

(ii) $\Re\langle x - z, y - z\rangle \leq 0$ für alle $y \in M$.

Hinweis: Betrachten Sie $\left\|x - y_\lambda\right\|^2$, wobei $y_\lambda := (1-\lambda)z + \lambda y$ ist für $0 \leq \lambda \leq 1$ und $y \in M$.

Aufgabe G21 (Beispiel für ein singuläres Maß)
Finden sie ein einfaches Beispiel zweier Wahrscheinlichkeitsmaße μ und ν, so dass es eine μ-Nullmenge N gibt mit $\nu(N) = 1$.

Hausübung

Aufgabe H14 (Bedingte Erwartung) (1 Punkt)
Sei $\mathscr{H}$ der Hilbertraum $\mathscr{H} := L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit $\mu(\Omega) < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ paarweise disjunkte Mengen mit $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ und $\mu(A_i) \neq 0$, für alle $1 \leq i \leq n$. Die von $A_1, \ldots, A_n$ erzeugte σ-Unteralgebra von Σ bezeichnen wir mit Σ_0.

(a) Zeigen Sie: Die Menge

$$V = \{f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu) \,:\, f \text{ ist messbar bezüglich } \Sigma_0\}.$$

ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathscr{H}$.
Hinweis: Wie sehen Elemente von V aus?

(b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion P von $\mathscr{H}$ auf V.
Hinweis: Welche Eigenschaft hat $f - Pf$?

Bemerkung: Handelt es sich bei μ um ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so bezeichnet man $P(f)$ als *bedingte Erwartung von f gegeben* Σ_0 und schreibt für $P(f)$ auch $\mathbb{E}(f|\Sigma_0)$.

Aufgabe H15 (Die große Projektionsaufgabe) (2 Punkte)

(a) Sei $\mathscr{H}$ der Hilbertraum $L^2([-1,1])$. Wir definieren die lineare Abbildung

$$U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}, \ \ (Uf)(t) = f(-t).$$

Sei $\mathscr{F}$ der abgeschlossene lineare Teilraum $\mathscr{F} := \{f \in \mathscr{H} : \ U(f) = f\}$.
Zeigen Sie, dass U unitär ist, bestimmen Sie den Raum $\mathscr{F}^\perp$ und drücken Sie die orthogonalen Projektionen $P_{\mathscr{F}}$ und $P_{\mathscr{F}^\perp}$ von $\mathscr{H}$ auf $\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}^\perp$ mit Hilfe von U aus.
Hinweis: Untersuchen Sie $f - P_{\mathscr{F}} f$ und $U(f - P_{\mathscr{F}} f)$, sowie deren Summe.

(b) Sei $\mathscr{H}$ der Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ferner sei S_n die Gruppe der Permutationen von n Elementen. Für $\sigma \in S_n$ definieren wir den unitären Operator

$$(U_\sigma f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)}).$$

Ferner sei $\mathscr{F} := \{f \in \mathscr{H} : \ U_\sigma f = f \text{ für alle } \sigma \in S_n\}$. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $\mathscr{H}$ auf $\mathscr{F}$, indem Sie diese mit Hilfe der unitären Operatoren U_σ ausdrücken.
Bemerkung: In der Quantenmechanik heißt $\mathscr{F}$ auch der *symmetrische n-Teilchen-Raum* und ist ein direkter Summand des symmetrischen Fockraumes.

(c) Abstrakt sieht das ganze so aus: Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe und $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum. Sei $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ die Gruppe der unitären Operatoren auf $\mathscr{H}$ und

$$\pi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H}) : g \mapsto U_g$$

ein Gruppenhomomorphismus, dass heißt, es gilt $U_g \cdot U_h = \pi(g) \cdot \pi(h) = \pi(g \circ h) = U_{g \circ h}$ für $g, h \in G$ (man sagt auch, π sei eine *unitäre Darstellung* der Gruppe G). Zeigen Sie, dass die orthogonale Projektion P auf den Fixraum $\mathscr{F} := \{x \in \mathscr{H} : \ U_g x = x \text{ für alle } g \in G\}$ durch

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} U_g$$

gegeben ist.

(d) Sei $0 \neq x \in \mathscr{H}$ und $M(x)$ die abgeschlossene konvexe Hülle der Menge $\{U_g x : g \in G\}$.
Zeigen Sie: $M(x)$ besitzt ein eindeutig bestimmtes Element v mit minimaler Norm und es gilt: $M(x) \cap \mathscr{F} = \{Px\} = \{v\}$.