Funktionalanalysis
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
08./09. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G14 (Eine Ungleichung)
Sei $M_n(\mathbb{C})$ der Vektorraum der komplexen $n \times n$-Matrizen und $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ die Spur auf $M_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ gilt:

$$\left|\mathrm{tr}(B^*A)\right|^2 \leq \mathrm{tr}(A^*A)\ \mathrm{tr}(B^*B).$$

Hinweis: An welche Ungleichung aus der Vorlesung erinnert Sie das?

Aufgabe G15 (Hilbertraumnorm)
Sei $(\mathscr{H}, \|\cdot\|)$ ein Prä-Hilbertraum.

(a) Zeigen Sie: Für $x, y \in \mathscr{H}$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $x \neq y$ ist $\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\| < 1$.

(b) Interpretieren Sie die Aussage aus (a) geometrisch: Wie sieht die Einheitskugel von $(\mathscr{H}, \|\cdot\|)$ aus?

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{C}^n$ nicht von einem Skalarprodukt erzeugt werden.

Aufgabe G16 (Projektionen und stop-Konvergenz)
Sei $\mathscr{H} := L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $\chi_{[-n,n]}$ die charakteristische Funktion von $[-n, n]$ und

$$P_n : \mathscr{H} \to \mathscr{H} : f \mapsto \chi_{[-n,n]} \cdot f .$$

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathscr{K}_n := \{f \in \mathscr{H} : f(x) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus [-n, n] \text{ fast überall}\}$. Zeigen Sie, dass jedes $\mathscr{K}_n$ ein abgeschlossener Teilraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass P_n die orthogonale Projektion von $\mathscr{H}$ auf $\mathscr{K}_n$ ist für $n \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie, dass $\underset{n\to\infty}{\text{stop-lim}}\, P_n = \mathbb{1}$ gilt.

Aufgabe G17 (Keine Hilbertraumnorm)
Zeigen Sie: Für $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, ist $\|\cdot\|_p$ auf $\mathbb{C}^n$ keine Hilbertraum-Norm, d.h., keine Norm, die von einem Skalarprodukt kommt. (Warum reicht es, das für $n = 2$ zu überprüfen?)

Hausübung

Aufgabe H11 (Große Einheitskugeln) (1 Punkt)

(a) Finden Sie in den Einheitskugeln von $(\mathcal{C}([0,1]), ||\cdot||_\infty)$, und von $(L^p([0,1]), ||\cdot||_p)$ konkrete Beispiele von Folgen, die keine konvergente Teilfolge enthalten.

(b) Auf $\ell^\infty(\mathbb{N})$ betrachten wir $||x||_Q := \limsup_n |x_n|$ für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$.

(i) Zeigen Sie: $||\cdot||_Q$ ist eine Halbnorm auf $\ell^\infty(\mathbb{N})$ und es ist $||x||_Q = 0$ genau dann, wenn $x \in c_0(\mathbb{N})$.

(ii) Zeigen Sie, dass $||x||_Q = ||[x]||_0$, wobei $||\cdot||_0$ die Quotientennorm auf $\ell^\infty(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N})$ bezeichnet.

(c) Bestimmen Sie eine überabzählbare Teilmenge M der abgeschlossenen Einheitskugel von $(\ell^\infty(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_0)$ mit der Eigenschaft, dass $\|x-y\|_0 = 1$ für $x, y \in M,\ x \neq y$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie Null-Eins-Folgen. Wann sind zwei Null-Eins-Folgen in derselben Äquivalenzklasse?

Aufgabe H12 (Skalarprodukt auf Quotienten) (1 Punkt)

Sei V ein Vektorraum mit Semi-Skalarprodukt $<\ ,\ >$ und sei $N := \{x \in V : <x,x> = 0\}$.
Zeigen Sie: Auf dem Quotientenraum V/N ist $<[x],[y]> := <x,y>$ ein wohldefiniertes Skalarprodukt. (Formulieren Sie Ihre Lösung besonders sorgfältig!)

Aufgabe H13 (Summen abgeschlossene Teilräume und Orthogonalität) (1 Punkt)

Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und M, N zwei abgeschlossene Teilräume von $\mathscr{H}$.

(a) Sei $M \perp N$, d.h. $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $x \in M$ und $y \in N$. Zeigen Sie, dass die Menge $M + N := \{x + y\ :\ x \in M, y \in N\}$ abgeschlossen ist.

(b) Sei $M \perp N$ und $M + N = \mathscr{H}$. Beweisen Sie, dass $N = M^\perp$ ist.

(c) Sei $A \subseteq \mathscr{H}$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie, dass $A^\perp = \overline{\operatorname{span}(A)}^\perp$ ist, wobei $\operatorname{span}(A)$ den linearen Spann / die lineare Hülle von A bezeichnet.