

Funktionalanalysis

3. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
01./02. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G9 (Quotientenabbildung)

Seien E, F normierte Räume, $T : E \rightarrow F$ linear und $H \subseteq E$ ein abgeschlossener Teilraum, sodass $H \subseteq \ker T$. Dann kann man $\tilde{T} : E/H \rightarrow F$ kanonisch definieren und es ist $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.

Aufgabe G10 (Isomorphismen)

Zeigen Sie: Ist $T : E \rightarrow F$ linear und bijektiv, sodass $\|T\|_{\text{op}} \leq 1$ und $\|T^{-1}\|_{\text{op}} \leq 1$, dann ist T isometrisch, d.h. $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in E$.

Aufgabe G11 (Multiplikationsoperatoren)

Sei $E := \mathcal{C}([0, 1])$, $g \in E$ und $M_g : \mathcal{C}([0, 1]) \ni f \mapsto g \cdot f \in \mathcal{C}([0, 1])$. Bestimmen Sie die Operatornorm $\|M_g\|_{\text{op}}$ für den Fall, dass

- (a) E mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\infty}$ versehen wird.
- (b) E mit der L^1 -Norm $\|\cdot\|_1$ versehen wird.

Was vermuten Sie für die anderen p -Normen?

Aufgabe G12 (Unendlich große Matrizen)

Gegeben sei $(a_{j,k})_{j,k \in \mathbb{N}}$ mit $a_{j,k} \in \mathbb{C}$ und $M := \sup\{|a_{j,k}| : j, k \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Für $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ definiere $Ax := y$ mit $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $y_j := \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} x_k$.

- (a) Zeigen Sie, dass $A : \ell^1(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^{\infty}(\mathbb{N})$ eine stetige lineare Abbildung ist.
- (b) Berechnen Sie die Operatornorm von A .

Aufgabe G13 (Integraloperatoren)

Sei $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Definiere eine Abbildung T als

$$(Tf)(x) := \int_a^b k(x, y) f(y) dy \quad \text{für } f \in (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_{\infty}).$$

- (a) Zeigen Sie, dass $T : (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_{\infty})$ ein stetiger Operator ist.
- (b) Bestimmen Sie eine obere Schranke für $\|T\|_{\text{op}}$.
- (c) Berechnen Sie $\|T\|_{\text{op}}$ für den Fall, dass $k(x, y) \neq 0$ für alle $x, y \in [a, b]$ ist.
- (d) Erläutern Sie die Analogie zu Aufgabe G12.

Hausübung

Aufgabe H8 (Grundraumtransformation)

(1 Punkt)

Gegeben sei eine stetige Funktion $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Wir definieren den Operator T_h auf $\mathcal{C}([0, 1])$ durch:

$$T_h(u) := u \circ h.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $T_h : (\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ eine beschränkte lineare Abbildung ist.
- (b) Bestimmen Sie die Operatornorm von T_h .
- (c) Zeigen Sie die beiden folgenden Aussagen:
 - (i) h ist injektiv genau dann, wenn T_h surjektiv ist.
 - (ii) h ist surjektiv genau dann, wenn T_h injektiv ist.
- (d) Bestimmen Sie den Kern von T_h .
- (e) Zeigen Sie: Bezüglich der punktweisen Multiplikation von Funktionen ist $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ eine Banachalgebra und T_h ist ein Algebra-Homomorphismus.
Setzen Sie dieses Ergebnis in Verbindung mit Ihrer Bestimmung von Kern T_h .

Bemerkung: Die Abbildung h wird auch als *Grundraumtransformation* bezeichnet.

Aufgabe H9 (Wann ist die Einheitskugel kompakt?)

(1 Punkt)

- (a) Sei $(E, \|\cdot\|)$ normierter Raum und $H \subset E$ ein echter abgeschlossener Teilraum. Zeigen Sie: Für $\varepsilon > 0$ existiert ein Element $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ und $\|x - h\| > 1 - \varepsilon$ für alle $h \in H$.

Hinweis: Machen Sie sich zunächst die Aussage in \mathbb{R}^2 oder \mathbb{C}^n mit der euklidischen Norm klar. Dann verstehen Sie die folgende Strategie:

Für ein Element $z \notin H$ finden Sie ein Element $h \in H$ sodass $\|z - h\|$ möglichst klein wird und betrachten Sie $x := \frac{z-h}{\|z-h\|}$.

- (b) Zeigen Sie nun: Ist der normierte Raum $(E, \|\cdot\|)$ nicht endlich-dimensional, so ist die Einheitskugel nicht kompakt.

Aufgabe H10 (Projektionen)

(1 Punkt)

Sei $(E, \|\cdot\|)$ normierter Raum und $H \subset E$ ein endlich-dimensionaler Teilraum.

- (a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in E$ ein $h_x \in H$ existiert, so dass $\|x - h_x\| = \inf_{h \in H} \|x - h\|$ ist.
- (b) Ist das Element $h_x \in H$ für $x \in E$ eindeutig bestimmt?