Funktionalanalysis
2. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
25./26. Oktober 2012

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Zum Aufwärmen: Inneres, Abschluss und offene Mengen)

(a) Bestimmen Sie das Innere und den Abschluss der Menge

$$A := \{f \in \mathcal{C}([-1,1]) : f > 0\}$$

in $\left(\mathcal{C}([-1,1]), \|\cdot\|_\infty\right)$.

(b) Bestimmen Sie das Innere und den Abschluss der Menge

$$B := \{f \in L^1([-1,1]) \,:\, f > 0 \text{ fast überall}\}$$

in $(L^1([-1,1]), \|\cdot\|_1)$.

(c) Ist die Menge der Polynomfunktion auf $[-1,1]$ eine offene Menge in $\left(\mathcal{C}([-1,1]), \|\cdot\|_\infty\right)$?

Aufgabe G5 (Halbnorm und Quotient)

Sei E Vektorraum, $||\cdot||$ eine Halbnorm auf E und $H := \{x \in E : ||x|| = 0\}$. Sei die Halbnorm $||\cdot||_0$ auf dem Quotienten E/H definiert wie in der Vorlesung.

Zeigen Sie: $||\cdot||_0$ ist eine Norm auf E/H.

Aufgabe G6 (Ein Quotientenraum)

Sei $E := (\mathcal{C}([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ und $H := \{f \in E : f(x) = 0 \text{ für } x \geq \frac{1}{3}\}$. Zeigen Sie, dass H abgeschlossen ist und identifizieren Sie E/H mit einem bekannten Banachraum.

Aufgabe G7 (Banachraumwertige stetige Funktionen)

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und K eine kompakte Menge, ferner sei $f : K \to E$ eine stetige Abbildung.

Zeigen Sie, dass $\|f\|_\infty := \sup\left\{\|f(x)\| \,:\, x \in K\right\}$ existiert, und dass somit durch $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf dem Raum $\mathcal{C}(K;E)$ der stetigen Funktionen mit Werten in E definiert wird (das hatten wir schon in der Vorlesung kurz angesprochen).

Zeigen Sie nun: Ist E ein Banachraum, dann ist auch $\mathcal{C}(K;E)$ ein Banachraum. (Sie können zur Vereinfachung auch $K = [0,1]$ annehmen.)

Aufgabe G8 (Vervollständigung)

Vervollständigen Sie den Beweis der Vollständigkeit der Vervollständigung eines normierten Raumes in 2.10 der Vorlesung.

Hausübung

Aufgabe H4 (Geometrische Interpretation von Normen und konvexe Mengen) (1 Punkt)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und $K \subset V$ eine Teilmenge von V mit folgenden Eigenschaften:

(i) K ist konvex.
(ii) K ist absorbierend, d.h. $\forall\, x \in V\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0 :\ x \in \alpha K := \{\alpha k \mid k \in K\}$.
(iii) K ist kreisförmig, d.h., $\forall\, x \in K\ \forall\, \beta \in \mathbb{K}$ mit $|\beta| = 1$ ist $\beta x \in K$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\|x\| := \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha \cdot K\}$ eine Halbnorm auf V definiert wird.

(b) Welche Eigenschaft einer Halbnorm ist nicht erfüllt, wenn man die Eigenschaft (i) (bzw. (ii), bzw. (iii)) nicht berücksichtigt?

(c) Wie muss K beschaffen sein, dass die in Aufgabenteil (a) definierte Halbnorm eine Norm ist? Geben Sie ein Beispiel an, bei dem K nur eine Halbnorm erzeugt.

(d) Sei $p : V \to [0, \infty)$ eine Abbildung, so dass
(i) $p(x) = 0 \iff x = 0$,
(ii) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ für alle $x \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
Zeigen Sie, dass p genau dann eine Norm ist, wenn $K_p := \{x \in V\ :\ p(x) \le 1\}$ konvex ist.

Aufgabe H5 (Extremalpunkte) (1 Punkt)
Ein Element x einer konvexen Menge K heißt *Extremalpunkt* von K, falls aus

$$x = \lambda y + (1 - \lambda) z$$

mit $y, z \in K$ und $\lambda \in (0, 1)$ folgt, dass $y = x = z$ ist.

(a) Sei nun $K := \{x \in X\ :\ \|x\| \le 1\}$ die Einheitskugel eines normierten Raumes $(E, \|\cdot\|)$. Zeigen Sie: $\|x\| = 1$ für jeden Extremalpunkt x von K.

(b) Bestimmen Sie die Extremalpunkte der Einheitskugeln in $\mathbb{R}^2$ für die p-Normen, $1 \le p \le \infty$.

(c) Weisen Sie nach, dass in

$$E := \mathcal{C}([0, 1]),\ \text{mit } \|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

die Einheitskugel K keinen Extremalpunkt besitzt. Hierbei sei, wie üblich, $\mathcal{C}([0, 1])$ der Raum der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$.

Aufgabe H6 (Abgeschlossen + abgeschlossen ist nicht immer abgeschlossen) (1 Punkt)
Betrachten Sie die folgenden Teilräume von $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$:

$$U := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})\ :\ x_{2n} = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\}, \quad V := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})\ :\ x_{2n-1} = n x_{2n}\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) U und V sind abgeschlossene Teilräume von $\ell^1(\mathbb{N})$.

(b) $U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$ ist nicht abgeschlossen in $\ell^1(\mathbb{N})$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Raum der finiten Folgen $\Phi \subseteq U + V$ ist.

Aufgabe H7 (Positive Abbildungen sind stetig) (1 Punkt)
Sei X eine kompakte Menge und $(\mathcal{C}(X; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ der Raum der stetigen Funktionen auf X mit Werten in $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm. Sei $T : \mathcal{C}(X; \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(X; \mathbb{R})$ eine *positive* lineare Abbildung, d.h. für eine positive (bzw. nicht-negative) Funktion $f \ge 0$ ist auch $T(f) \ge 0$ (hat nicht-negative Funktionswerte).

Zeigen Sie, dass T stetig und dass $\|T\|_{\mathrm{OP}} = \|T(\mathbb{1})\|_\infty$ ist.