

Funktionalanalysis

1. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Burkhard Kümmerer
Andreas Gärtner

Wintersemester 2012/2013
18./19. Oktober 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Zur Motivation für die Funktionalanalysis)

Sei $A : C^\infty([0, 1]) \rightarrow C^\infty([0, 1]) : f \mapsto f'$ der Ableitungsoperator.

- (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von A .
- (b) Was ist $(e^{At}f)(x)$, wenn man e^{At} formal in eine Potenzreihe entwickelt? Welchen klassischen Satz aus der Analysis erkennen Sie? Warum ist das nicht befriedigend?

Aufgabe G2 (ℓ^p -Räume)

Für $1 \leq p \leq \infty$ sei $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ der normierte Vektorraum

$$\ell^p := \left\{ x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \infty \right\} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty,$$

bzw.

$$\ell^\infty := \{ x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|x\|_\infty := \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\} < \infty \} \quad \text{für } p = \infty.$$

- (a) Zeigen Sie: Für $1 \leq p < p' \leq \infty$ ist ℓ^p eine echte Teilmenge von $\ell^{p'}$.
- (b) Eine Folge heißt *finit*, wenn nur endlich viele Folgenglieder ungleich Null sind. Sei Φ der Vektorraum der finiten Folgen. Zeigen Sie, dass $\Phi \subset \ell^p$ für alle $p \geq 1$. Für welche $1 \leq p \leq \infty$ ist Φ dicht in $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$?

Aufgabe G3 (Einige Normen auf \mathbb{K}^n)

Sei $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wir betrachten auf \mathbb{K}^n die Funktionen

$$\|z\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^p \right)^{1/p}, \quad 0 \leq p < \infty, \quad \text{und} \quad \|z\|_\infty := \max\{|z_i| : i = 1, \dots, n\}.$$

- (a) Skizzieren Sie einige „Einheitskugeln“ $E_1^p := \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\|_p \leq 1\}$ für einige charakteristische Werte von p (für welche Werte von p ist das besonders einfach?). Für welche Werte von p ist $\|\cdot\|_p$ sicher keine Norm?
- (b) Zeigen Sie: $\lim_{p \rightarrow \infty} \|z\|_p = \|z\|_\infty$ für alle $z \in \mathbb{C}^n$.

(c) Für $\alpha > 0$ sei $H_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$ der von $\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ erzeugte lineare Teilraum.

Betrachten Sie den Quotientenraum \mathbb{R}^2/H_α von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ für $p = 1, 2, \infty$. Natürlich ist dieser Quotientenraum eindimensional. Mit welchem eindimensionalen Teilraum von \mathbb{R}^2 und welcher Norm auf diesem Teilraum würden Sie den Quotienten auf natürliche Weise identifizieren?

Hausübung

Aufgabe H1 (Äquivalente Topologien)

(1 Punkt)

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Eine Menge $A \subseteq E$ ist (nach Definition) genau dann offen, wenn für jeden Punkt $x \in A$ ein $r > 0$ existiert mit $K_r(x) \subseteq A$.

Zeigen Sie: Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf E dann sind äquivalent:

- (a) $(E, \|\cdot\|_1)$ und $(E, \|\cdot\|_2)$ haben dieselben offenen Mengen.
- (b) Es gibt Konstanten $C > 0$ und $D > 0$ mit $C\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq D\|x\|_1$ für alle $x \in E$.

Aufgabe H2 (Umgang mit Metriken)

(1 Punkt)

- (a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass der Raum (X, d_1) mit

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ebenfalls ein metrischer Raum ist.

- (b) Sei X ein Vektorraum über \mathbb{R} und d eine beliebige Metrik auf X . Weisen Sie nach, dass auf X keine Norm $\|\cdot\|$ mit der Eigenschaft $\|x - y\| = d_1(x, y)$ für alle $x, y \in X$ existiert.
- (c) Gegeben sei die Metrik $d_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $d_2(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Weiterhin sei auf \mathbb{R} die Metrik $d_3(x, y) := |x - y|$ gegeben. Zeigen Sie, dass die identische Abbildung $\text{Id} : (\mathbb{R}, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d_3)$ zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.
Hinweis: Ist jede Cauchy-Folge bezüglich d_2 auch automatisch eine Cauchy-Folge bzgl. d_3 ?

Aufgabe H3 (Summe von Banachräumen)

(1 Punkt)

Gegeben seien zwei Banachräume $(E, \|\cdot\|_1)$ und $(F, \|\cdot\|_2)$.

Zeigen Sie: Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(E \oplus F, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum, wobei $\|x \oplus y\|_p := (\|x\|_1^p + \|y\|_2^p)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$ bzw. $\|x \oplus y\|_\infty := \max\{\|x\|_1, \|y\|_2\}$ ist.