Nichtlineare Optimierung
14. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Irwin Yousept
Hannes Meinlschmidt

WS 2012/13
14.2.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Zentraler Pfad für Lineare Probleme)
Wir betrachten das folgende, zueinander duale, Paar linearer Programme

$$\min \quad c^T x \quad \text{s.t.} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad \text{(PLP)} \qquad\qquad \max \quad b^T y \quad \text{s.t.} \begin{cases} A^T y + s = c \\ s \geq 0, \end{cases} \qquad \text{(DLP)}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben sind.

(a) Formulieren Sie zu (PLP) bzw. (DLP) jeweils das logarithmische Barriere-Problem (BPLP$_\alpha$) bzw. (BDLP$_\alpha$) bezüglich der Vorzeichenbedingungen mit Barriere-Parameter $\alpha > 0$. Lassen Sie die Gleichungsnebenbedingungen also unverändert.

(b) Sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   i. Das primale logarithmische Barriere-Problem (BPLP$_\alpha$) besitzt eine Lösung x_α.
   ii. Das duale Barriere-Problem (BDLP$_\alpha$) besitzt eine Lösung (y_α, s_α).
   iii. Die sogenannten *zentralen Pfadbedingungen*

$$\begin{aligned} A^T y + s &= c, \\ Ax &= b, \\ x &> 0, \\ s &> 0, \\ x_i s_i &= \alpha \quad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

   besitzen eine Lösung $(x_\alpha, y_\alpha, s_\alpha)$.

(c) Zeigen Sie: Erfüllt (x, y, s) die zentralen Pfadbedingungen, dann gilt

$$x^T s = c^T x - b^T y,$$

das heißt, $x^T s$ ist die Differenz vom primalen und dualen Zielfunktionswert zu den Lösungen x beziehungsweise (y, s). Insbesondere ist der Zielfunktionswert der beiden Probleme (PLP) und (DLP) gleich, sobald $x \perp s$ gilt.

Aufgabe G2 (Dualität)
Stellen Sie die dualen Probleme zu folgenden (primalen) Problemen auf:

$$\min \quad c^T x \quad \text{s.t.} \begin{cases} Ax = a, \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad \text{(LP)} \qquad\qquad \min \quad \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \quad \text{s.t.} \begin{cases} Ax \leq a, \\ Bx = b. \end{cases} \qquad \text{(QP)}$$

Hier ist $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ und $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^p$. Übernehmen Sie jeweils das innere Infimum in der dualen Zielfunktion als Nebenbedingung ins duale Problem.

Aufgabe G3 (Ausblick: Semidefinite Probleme und Dualität)
Wir betrachten das *semidefinite Optimierungsproblem*

$$\min_{X\in\mathbb{R}^{n\times n}} \quad \langle C,X\rangle \qquad \text{s.t.} \quad \begin{cases} \langle A_i,X\rangle = b_i \quad (i=1,\dots,m),\\ \qquad X\in\mathscr{S}^+, \end{cases} \tag{SDP}$$

wobei $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen und $b_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1,\dots,m\}$ seien, und $\mathscr{S}^+ \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ den Kegel der symmetrisch positiv semidefiniten Matrizen bezeichne. Weiterhin ist

$$\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}(B^TA) = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}A_{ij}$$

das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Bestimmen Sie das zu (SDP) duale Problem. Betrachten Sie dazu die Lagrange-Funktion

$$L(X,y) = \langle C,X\rangle + \sum_{i=1}^{m} y_i(b_i - \langle A_i,X\rangle)$$

mit $X \in \mathscr{S}^+$ und $y \in \mathbb{R}^m$. Ersetzen Sie beim Aufstellen das beim Aufstellen des dualen Problems auftretende Infimum durch geeignete Nebenbedingungen. Ist das duale Problem wieder ein semidefinites Problem?

Hinweis: Folgende Aussage kann ohne Beweis verwendet werden: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann gilt

$$A \in \mathscr{S}^+ \quad\Longleftrightarrow\quad \langle A,B\rangle \geq 0 \text{ für alle } B \in \mathscr{S}^+.$$

Bemerkung. Die Bedingung $X \in \mathscr{S}^+$ für "X ist symmetrisch positiv semidefinit" schreibt man auch oft als $X \succeq 0$.

(b) Untersuchen Sie (SDP) für die konkreten Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das zugehörige duale Problem und zeigen Sie, dass die Optimalwerte von primalem und dualem Problem nicht übereinstimmen.

Hinweis: Folgende Aussage kann ohne Beweis verwendet werden: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv semidefinit. Gilt $A_{ii} = 0$ für ein $i \in \{1,\dots,n\}$, dann folgt $A_{ij} = 0$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$ (Zeilendiagonaldominanz).

Aufgabe G4 (Ausblick: Optimalsteuerung)
Wir betrachten *Optimalsteuerungsproblem* (engl. *optimal control problem*):

$$\begin{aligned} \min_{y,u} \quad & \frac{1}{2}\int_\Omega |y - y_d|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\beta}{2}\int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} -\Delta y = u & \text{in } \Omega \\ y = 0 & \text{auf } \partial\Omega \\ u_{\min} \leq u \leq u_{\max} & \text{in } \Omega \end{cases} \end{aligned} \tag{PDEOP}$$

Hier ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $y_d : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $u_{\min} < u_{\max}$ jeweils reelle Zahlen. Wir suchen also *Funktionen* (!) $y, u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die über die partielle Differentialgleichung $-\Delta y = u$ verknüpft sind. Die Funktion u stellt dabei eine *Steuerung* (engl. *control*) des Vorgangs dar und soll punktweise nach oben und unten durch $u_{\min}$ und $u_{\max}$ beschränkt sein (z.B. eine Energequelle, die aus technischen Gründen nicht beliebig viel Energie liefern kann). Dabei suchen wir u und y nicht irgendwie, sondern so, dass y im quadratischen Mittel möglichst genau einer gegebenen Funktion y_d entspricht (erstes Integral in der Zielfunktion), und das Ganze dabei möglichst wenig Energie kostet (zweites Integral). Das β kann vorerst ignoriert werden, es soll aber $\beta > 0$ gelten.
Da es sich hier um ein unendlichdimensionales Optimierungsproblem handelt (wir suchen schließlich Funktionen), können wir die Mittel der Vorlesung nicht direkt anwenden. Wir stellen uns in dieser Aufgabe aber naiv, tun so, als wären y, u nur Vektoren und schreiben (PDEOP) einfach mal etwas anders auf:

$$\begin{aligned} \min_{y,u} \quad & \frac{1}{2}\|y - y_d\|_2^2 + \frac{\beta}{2}\|u\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} Ay = u, \\ u_{\min} \leq u, \\ u \leq u_{\max}, \end{cases} \end{aligned} \tag{PDEOP'}$$

wobei A wie eine lineare Abbildung zu sehen und $\|\cdot\|_2$ jeweils eine von einem Skalarprodukt stammende Norm sei.

(a) Stellen Sie formell die KKT-Bedingungen für (PDEOP') auf.

(b) Übersetzen Sie die KKT-Bedingungen wieder zurück in die "nicht-naive" Betrachtungsweise.
Hinweis: Das hier auftretende A ist selbstadjungiert (für reelle Matrizen kennt man das auch als symmetrisch).

(c) Finden Sie eine konkrete Darstellung für die optimale Steuerung $\bar{u}$. Sie dürfen dazu die KKT-Bedingungen als notwendig für Optimalität annehmen, d.h. eine (ACQ) soll gelten. Was passiert für $\beta = 0$?

Bemerkung. Achtung: Obwohl die übersetzten Formulierungen von sowohl Optimierungsproblem als auch Optimalitätsbedingungen hier sehr natürlich zustande kommen, muss man durchaus einiges an Arbeit investieren, um Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen bzw. optimale Steuerung mathematisch rigoros zu bearbeiten. Das liegt daran, dass bei unendlichdimensionalen Aufgaben viel mehr Probleme auftreten können als im endlichdimensionalen Fall (dafür kann man natürlich auch viel interessante Dinge damit tun), vgl. Vorlesungen zu Funktionalanalysis, partiellen Differentialgleichungen bzw. Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen/in Funktionenräumen.