Nichtlineare Optimierung
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Irwin Yousept
Hannes Meinlschmidt

WS 2012/13
31.1.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Hinreichende Bedingung zweiter Ordnung)
Gegeben seien die folgenden Optimierungsprobleme:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(P1)} \qquad\qquad \begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 9/4)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ & x_2 - x_1^2 \geq 0 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(P2)}$$

(a) Bestimmen Sie für Problem (P1) in den Punkten $x^1 = (4,4)$ und $x^2 = (6,2)$ Lagrange-Multiplikatoren, so dass die KKT-Bedingungen erfüllt sind und geben Sie jeweils den zugehörigen Kegel der kritischen Richtungen T_+ an. Überprüfen Sie damit, ob die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung erfüllt ist.

(b) Bestimmen Sie für das quadratische Problem (P2) im Punkt $\bar{x} = (3/2, 9/4)$ Lagrange-Multiplikatoren, so dass die KKT-Bedingungen gelten (hier können Ergebnisse aus der letzten Übung aufbereitet werden), und den Kegel der kritischen Richtungen. Ist die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung erfüllt?

Aufgabe G2 (Allgemeine ℓ_q-Penalty Funktionen)
In der Vorlesung haben wir bereits die ℓ_1-Penalty-Funktion $f(x) + \alpha(\|(g(x))_+\|_1 + \|h(x)\|_1)$ kennengelernt. Tatsächlich ist diese ein Spezialfall der allgemeinen ℓ_q-Penalty-Funktion $f(x) + \alpha\pi_q(x)$ mit

$$\pi_q(x) = \begin{cases} \|(h(x), g(x)_+)\|_q = \left(\sum_{j=1}^p |h_j(x)|^q + \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\}^q\right)^{1/q} & \text{für } 1 \leq q < \infty, \\ \|(h(x), g(x)_+)\|_\infty = \max\left\{0, |h_1(x)|, \ldots, |h_p(x)|, g_1(x), \ldots, g_m(x)\right\} & \text{für } q = \infty. \end{cases}$$

Wir betrachten das Standardproblem

$$\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0. \qquad \text{(NLP)}$$

Zeigen Sie:
Satz 1. *Sei x^* ein lokales Minimum für* (NLP). *Existiert ein $q^* \in [1,\infty]$, so dass die ℓ_{q^*}-Penalty-Funktion mit Penalty-Parameter α^* exakt in x^* ist, so sind* alle *ℓ_q-Penalty-Funktionen für $q \in [1,\infty]$ für einen von q abhängigen Penalty-Parameter $\alpha_q \geq \alpha^*$ exakt in x^*.*
Hinweis: Oft wird Exaktheit auch so gefordert: Ist eine (allgemeine) Penalty-Funktion mit Penalty-Parameter α^* exakt in x^*, so ist sie auch exakt in x^* für alle Penalty-Parameter $\alpha \geq \alpha^*$. Machen Sie sich klar, dass diese Forderung äquivalent dazu ist, dass generell ein Parameter α^* existiert, so dass die Penalty-Funktion exakt in x^* ist. Das kann im Beweis helfen, muss aber nicht.

Aufgabe G3 (Multiplier-Penalty– oder Augmented-Lagrange-Funktion und –Verfahren)
Wir untersuchen in dieser Aufgabe das rein gleichungs-restringierte Problem

$$\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad h(x) = 0. \qquad \text{(NLPG)}$$

Offenbar ist ein lokales Minimum von (NLPG) auch ein lokales Minimum des äquivalenten Problems

$$\min f(x) + \frac{\alpha}{2}\|h(x)\|^2 \quad \text{s.t.} \quad h(x) = 0. \tag{NLPG'}$$

Die Lagrange-Funktion von (NLPG') ist gegeben durch

$$L_\alpha(x,\mu) := f(x) + \mu^T h(x) + \frac{\alpha}{2}\|h(x)\|^2$$

und wird *erweitere Lagrange-Funktion* (engl. *augmented Lagrangian*) oder *Multiplier-Penalty-Funktion* von (NLPG) genannt.

Zeigen Sie folgenden Satz:

Satz 2. *Sei* (x^*, μ^*) *ein KKT-Punkt von* (NLPG)*, in dem die hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung erfüllt ist. Dann existiert ein* $\alpha^* > 0$*, so dass* x^* *für jedes* $\alpha \geq \alpha^*$ *ein striktes lokales Minimum der Funktion* $L_{\alpha^*}(\cdot, \mu^*)$ *ist.*

Diskutieren Sie weiterhin, welche Möglichkeiten zur Bestimmung einer Lösung von (NLPG) sich ergeben und welche Probleme dabei auftreten können, insbesondere auch im Vergleich zu den schon kennengelernten Penalty-Verfahren.

Hinweis: Sie dürfen folgende extrem anschaulich erscheinende Aussage ohne Beweis benutzen: Ist B symmetrisch positiv semidefinit und A positiv definit auf $\ker B$, so existiert ein $\bar{\rho} > 0$, so dass $A + \rho B$ für alle $\rho \geq \bar{\rho}$ positiv definit ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvexe Probleme und die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung) (5 Punkte)

(a) Seien im allgemeine Problem

$$\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0 \tag{NLP}$$

die Gleichungsrestriktionen h affin-linear, sowie f und jedes g_i $(i = 1, \ldots, m)$ konvex. Zeigen Sie: Erfüllt $\bar{x}$ die KKT-Bedingungen mit Lagrange-Multiplikatoren $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$, und ist f streng konvex oder mindestens ein g_i für $i \in \mathscr{A}(\bar{x})$ mit $\bar{\lambda}_i > 0$ streng konvex, so ist $\bar{x}$ ein isoliertes Minimum von f. Benutzen Sie zum Beweis den passenden Satz aus der Vorlesung oder dem Buch, bzw. modifizieren Sie dessen Beweis.

(b) Seien nun f und c linear und keine Gleichungsrestriktionen vorhanden, d.h. wir betrachten das lineare Problem

$$\min c^T x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b \tag{LP}$$

für geeignete Vektoren $c \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^m$, sowie $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Geben Sie die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung für (LP) an. Zeigen Sie ausserdem, dass es für jeden isolierten Optimalpunkt des Problems Lagrange-Multiplikatoren gibt, so dass die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung erfüllt ist.

(c) Zeigen Sie, dass die zu zeigende Aussage aus (b) für das allgemeine Problem NLP im Allgemeinen nicht gelten muss.

Aufgabe H2 (Trajektorie des Penalty-Verfahrens) (6 Punkte)

Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\min x_1^2 + 4x_2 + x_2^2 \quad \text{s.t.} \quad x_2 \geq 0. \tag{P}$$

Das allgemeine quadratische Penalty-Problem zu (P) lautet

$$\min P_{\alpha_k}(x) := f(x) + \frac{\alpha_k}{2}\sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x)\}^2,$$

wobei $(\alpha_k) \subset (0, \infty)$ eine unbeschränkte, streng monoton wachsende Folge ist.

(a) Bestimmen Sie die globale Lösung x^* von (P) und den zugehörigen Lagrangemultiplikator λ^*.

(b) Berechnen Sie für $\alpha > 0$ allgemein das globale Minimum $x(\alpha)$ von $P_\alpha(x)$.

(c) Zeigen Sie $x^* = \lim_{\alpha\to\infty} x(\alpha)$ und $\lambda^* = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha \max\{0, c(x(\alpha))\}$.

(d) Wie verhält sich die Konditionszahl der Hessematrix $\nabla^2 P_\alpha(x(\alpha))$ für $\alpha \to \infty$?

Aufgabe H3 (Exakte Penalty-Funktionen) (3 Punkte)

Betrachten Sie das eindimensionale Optimierungsproblem

$$\min x^2 \quad \text{s.t.} \quad x - 1 = 0,$$

mit der Lösung $x^* = 1$.

(a) Bestimmen Sie $\bar{\alpha} > 0$ so, dass die zugehörige ℓ_1-Penalty-Funktion $P_\alpha^1(x)$ für alle $\alpha \geq \bar{\alpha}$ exakt in x^* ist.

(b) Zeigen Sie, dass die quadratische Penalty-Funktion $P_\alpha(x)$ für $\alpha = 2$ *nicht* exakt in x^* ist.